

# LOS OBJETOS FRACTALES

Benoît Mandelbrot



MÉTATEMAS  
LIBROS PARA PENSAR LA CIENCIA





¿Qué son los **objetos fractales**? ¿Para qué sirven, cuál es su historia y por qué se llaman así? Los **fractales** representan a la vez una teoría matemática y un método para analizar una gran diversidad de fenómenos de la naturaleza; precisamente aquellos fenómenos que se nos antojan «sin ley», como la caprichosa forma de una costa, de una nube o, incluso, de una obra de arte.

**Benoît Mandelbrot** creó los **fractales** a principios de los años sesenta y hoy protagonizan investigaciones que se ocupan de física teórica, geografía, economía, biología, etc., de modo que en la actualidad se puede decir que existe una concepción y una geometría *fractales* de la naturaleza. Éstas se basan, en esencia, en el concepto de *autosimilitud*, una propiedad exhibida por aquellos sistemas cuyas estructuras permanecen constantes al variar la escala de observación; en otras palabras: cuando *las partes*, por pequeñas que éstas sean, se parecen al *todo*.

Este libro es el primer ensayo dedicado a exponer la teoría y es también, por lo tanto, un documento histórico impregnado de las vivencias directas de este científico cuya sorprendente aventura intelectual se desarrolla entre la Universidad de Harvard y la IBM.



Benoît Mandelbrot

## **Los objetos fractales**

**Forma, azar y dimensión**

**ePub r1.0**

**koothrapali 29.10.13**

Título original: *Les objets fractals. Forme, hasard et dimension*

Benoît Mandelbrot, 1975

Traducción: Josep Llosa

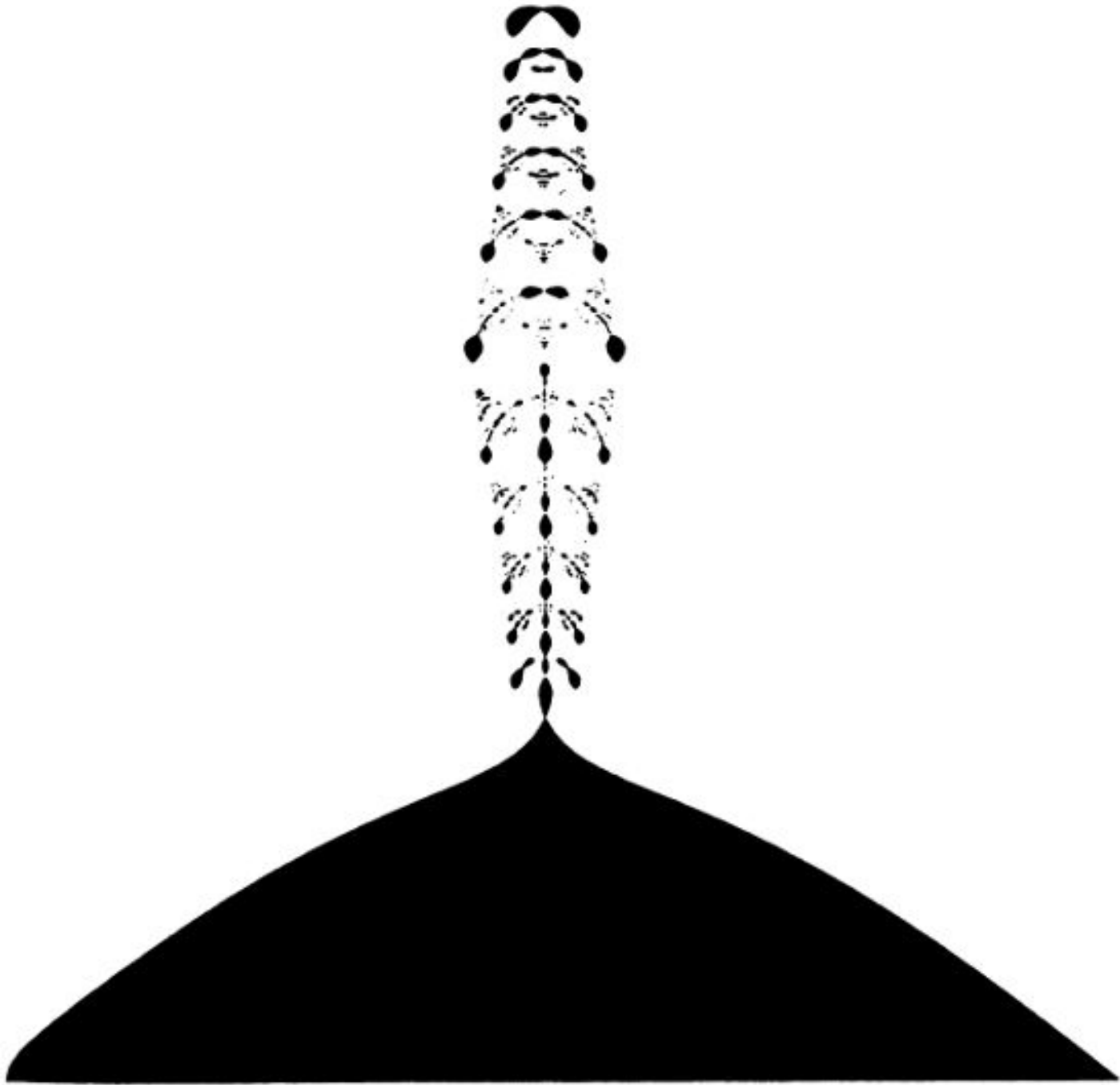
Diseño de portada: Piolin

Editor digital: koothrapali

ePub base r1.0



*In memoriam, B. y C.*  
Para Aliette



## PRÓLOGO A LA SEGUNDA EDICIÓN

Esta edición difiere poco de la de 1975, pues los cambios —si bien numerosos y en absoluto desdeñables— conciernen a cuestiones de detalle. En efecto, al volver a poner este libro sobre la mesa de trabajo, he tenido la feliz sorpresa de constatar que tenía pocas rugosidades. Es decir, que quizá ha atravesado deprisa la edad ingrata en que uno está cada vez menos de moda para llegar a una edad en que la moda deja de ser importante. La geometría fractal de la naturaleza, cuya primera exposición es esta obra, se ha desarrollado en todos los sentidos de una manera explosiva, pero este libro enunciaba ya la mayoría de las ideas esenciales. Así pues, es cada vez menos un tratado, pero continúa siendo una introducción, así como también un documento histórico. Conserva, sin duda, las alocadas ambiciones de la primera edición. Por una parte, es a la vez una nueva síntesis matemática y filosófica y una colección de micromonografías que se refieren a mis descubrimientos en diversos capítulos de la ciencia. Por otra, sin embargo, está dirigida al mismo tiempo a públicos dispares: pretende inducir a especialistas de distintas ciencias a que olviden su especialización para que sueñen y creen conmigo (aquellos que quieran más, que lean el *post-scriptum* del Capítulo 17). Pero, aunque mi texto pretende informar, también quiere divertir al aficionado.

\* \* \*

Para presentar un resumen agradable, legible en una noche, he eliminado muchos fragmentos inútiles del texto de 1975. Por ejemplo, la introducción ha sido muy aligerada, ya que ahora es innecesario argumentar tan insistentemente a favor de unas ideas que ya no encuentran oposición. Asimismo, varios fragmentos alambicados se han convertido en superfluos por el hecho de que ciertas conjeturas matemáticas que había formulado en 1975 han sido demostradas, gracias al trabajo de numerosos matemáticos, directamente influenciados por este libro y sus sucesores. También, muchos de mis modelos específicos basados en los fractales han sido explicados posteriormente a partir de principios más fundamentales. No hace falta ya que me justifique por el hecho de que la mayor parte de este libro se entretenga en descripciones sin dar demasiadas explicaciones.

Además, se ha suavizado el estilo en aquellos lugares donde resultaba «demasiado fractal», se han renovado las ilustraciones (aunque siempre a partir de las originales o de sus equivalentes), se han corregido diversos errores y erratas, y se ha añadido un Léxico de Neologismos (el nuevo Capítulo 13). El antiguo Capítulo 13, más desarrollado, se ha convertido en Capítulo 14.

A fin de conservar el carácter histórico y el tono de un manifiesto escrito en 1975, las añadiduras, más bien escasas, toman la forma de breves *post-scriptum*. (Para conocer el estado de cualquier teoría de base fractal, hay que remitirse a mi libro de 1982, *The Fractal Geometry of Nature*, cuyo índice es muy completo). Me he conformado, sin embargo, con insertar referencias recientes y una lista (completa hasta mayo de 1984) de mis trabajos sobre las fractales.

\* \* \*

Para evitar malentendidos impertinentes, no pocos *se* y *nosotros*, discretos pero ambiguos, han sido sustituidos por *yo*. Es un placer manifestar hoy que lo que era inédito

en 1975 (véase la página 25) lo era, en general, por no haber sido considerado aceptable por alguna revista respetable y apropiada. Tal era el caso del Capítulo 6, el más largo de este libro y el primero en ser redactado. Tenía por lo tanto razones para adoptar un tono anodino que evitara exasperar. Pero a fuerza de argumentar que tal o cual de mis tesis *tendría que ser considerada en el futuro* como algo que cae por su propio peso, había hecho creer a algunos que dicha tesis *era aceptada desde hacía tiempo*. Esta edición precisa que ése no es el caso.

Hay una cuestión que más vale atacar frontalmente. ¿Acepto que se me califique de «inventor de los fractales», o aun de «padre de la revolución fractal»? Lo acepto con sorpresa pero con gusto, y puede que incluso lo provoque cuando escribo en la página 13 que «he concebido, puesto a punto y utilizado extensamente una nueva geometría». Debería ser evidente que esta afirmación no niega, ni mucho menos, que, para construir mis primeras «máquinas» científicas, he recuperado innumerables «piezas sueltas» antiguas pero concebidas para usos completamente distintos. Sin estas piezas de «desguace», jamás un hombre solo se habría bastado para la tarea. En particular, he tomado de George Cantor los polvos de Cantor, de Giuseppe Peano y Helge Von Koch, las curvas de Peano y de Koch, y de Felix Hausdorff el concepto de dimensión de Hausdorff. De manera más general, doy referencias numerosas y precisas de las piezas sueltas que he ido utilizando. No obstante, este libro no sólo no es una simple vulgarización de todo ello, sino que, como se verá, y como un eminente sabio ha escrito en una reseña, la utilización que hago de esas cosas conocidas es tan sorprendente que parece como si implicara que «la naturaleza les hubiera gastado una broma a los matemáticos». De todos modos, en lo sucesivo, el grueso de las herramientas de la geometría fractal está concebido específicamente para serle útil.

Los malentendidos en relación con este libro vienen de una vieja disputa entre los especialistas y los generalistas —entre los que me cuento—. Si se hubiera seguido el proceso «normal» de la investigación científica, puede pensarse que cada una de las teorías cuyos elementos presenta esta obra habría sido formulada, tarde o temprano, por un especialista arraigado cuya formación hubiera excluido a Cantor, Peano y Hausdorff. Por ejemplo, los parámetros que identifiqué de buenas a primeras como dimensiones fractales —o quizá sus inversas— habrían visto la luz bajo los nombres de «constante de Y» y «constante de Z». Posteriormente, algunos trabajos de síntesis habrían constatado que estas teorías se parecen. (Para otros desarrollos de este estilo, véase Stent 1972). Finalmente, alguien habría atacado el problema con las matemáticas existentes, clásicas ciertamente, pero oscuras y apartándose de cualquier aplicación.

No creáis que exagero. Al haber perdido los físicos la costumbre de que una obra original aparezca en forma de libro de buenas a primeras, como es el caso de este ensayo y de sus versiones inglesas posteriores, sucede a menudo que una referencia a mi Capítulo A inspira a algún especialista a reconstruir el contenido de mi Capítulo B. Para aliviar mi disgusto, dejadme hacer una pregunta retórica: ¿Hay que decir que es el citado especialista quien hace trabajo original, en tanto que el generalista, que soy, sólo había conseguido vulgarizar unas matemáticas ya conocidas?

\* \* \*

Hay que señalar dos detalles de estilo. Para evitar que interrumpan la continuidad del texto, las figuras se han agrupado al final de cada capítulo; para que sean fáciles de encontrar, se han indicado con los números de las páginas en las que se encuentran. Un nombre de autor seguido de una fecha, como Dupont 1979, se refiere a la bibliografía

citada al final del libro; para evitar la ambigüedad, si hay varias referencias de la misma fecha he añadido una letra al año.

Este volumen reproduce fotográficamente una maqueta que ha sido realizada bajo mi dirección; doy mis más sinceras gracias a Madame Janis T. Riznychok por su ayuda en esta tarea.

*Benoît Mandelbrot*

Marzo 1984

# Capítulo 1

## Introducción

En este ensayo, objetos naturales muy diversos, muchos de los cuales nos son familiares, tales como la Tierra, el Cielo y el Océano, se estudian con la ayuda de una amplia familia de objetos geométricos que hasta ahora habían sido considerados esotéricos e inutilizables, pero que, espero poder demostrar, por el contrario, que, por la simplicidad, la diversidad y la extensión extraordinarias de sus nuevas aplicaciones, merecen ser integrados pronto en la geometría elemental. Si bien su estudio corresponde a diferentes ciencias, la geomorfología, la astronomía y la teoría de la turbulencia, entre otras, los objetos naturales en cuestión tienen en común el hecho de poseer una forma sumamente irregular o interrumpida; a fin de estudiarlos, he concebido, puesto a punto y utilizado extensamente una nueva geometría de la naturaleza. El concepto que hace el papel de hilo conductor será designado por uno de los dos neologismos sinónimos, «objeto fractal» y «fractal», términos que he inventado, para las necesidades de este libro, a partir del adjetivo latino *fractus*, que significa «interrumpido o irregular».

¿Hace falta definir de manera rigurosa lo que es una figura fractal para luego decir que un objeto real es fractal si lo es la figura que conforma su modelo? Pensando que tal formalismo sería prematuro, he adoptado un método muy distinto, basado en una caracterización abierta, intuitiva, y procediendo por toques sucesivos.

El subtítulo subraya que mi meta inicial es descubrir, desde fuera, la *forma* de diversos objetos. Sin embargo, una vez que se supera esta primera fase, la prioridad pasa inmediatamente de la descripción a la explicación: de la geometría a la dinámica, a la y aun más allá.

El subtítulo indica también que, para engendrar la irregularidad fractal, hago hincapié en construcciones dominadas por el *azar*.

Finalmente, el subtítulo anuncia que una de las características principales de cualquier objeto fractal es su *dimensión* fractal, que se denotará por  $D$  y mide su grado de irregularidad e interrupción. No obstante, al contrario de las dimensiones habituales, la dimensión fractal puede muy bien ser una fracción simple, como  $1/2$  ó  $5/3$ , e incluso un número irracional, como  $\log 4/\log 3 \sim 1,2618\dots$  ó  $\pi$ . Así, resulta útil decir que para ciertas curvas planas muy irregulares la dimensión fractal está entre 1 y 2, o decir que para ciertas superficies muy hojaldradas y llenas de convoluciones la dimensión fractal es intermedia entre 2 y 3, y finalmente definir polvos sobre la recta cuya dimensión fractal está entre 0 y 1.

En algunas obras matemáticas que se refieren a ellas, se dice que ciertas figuras conocidas, que yo incorporo entre las fractales, tienen «dimensión fraccionaria». Este término, sin embargo, es confuso, pues no se suele calificar, por ejemplo, el número  $\pi$  de fracción. Más aún, hay entre las fractales no pocos objetos irregulares o interrumpidos que satisfacen  $D = 1$  ó  $D = 2$ , y sin embargo no se parecen en nada ni a una recta, ni a un plano. Una de las finalidades del término «fractal» es eliminar las dificultades generalmente asociadas al término «fraccionario».

A fin de sugerir qué objetos han de ser considerados fractales, empecemos por recordar que, en su esfuerzo por descubrir el mundo, la ciencia procede por series de

imágenes o modelos cada vez más «realistas». Los más simples son continuos perfectamente homogéneos, como un hilo o un cosmos de densidad uniforme, o un fluido de temperatura, densidad, presión y velocidad también uniformes. La física ha podido triunfar identificando numerosos dominios en los que tales imágenes son sumamente útiles, particularmente como bases a las que a continuación se añaden términos correctivos. Pero en otros dominios, la realidad se revela tan irregular, que el modelo continuo y perfectamente homogéneo fracasa y no puede servir ni tan sólo como primera aproximación. Se trata de los dominios en los que la física ha fracasado y de los que los físicos prefieren no hablar. (P.S. Esto era verdad en 1975, pero hoy lo es cada vez menos). Para presentar estos dominios y al mismo tiempo dar una primera indicación del método que he propuesto para abordarlos, voy a citar ahora algunos párrafos del poco conocido prólogo de una obra célebre, *Les Atomes* (Perrin 1913).

*Donde Jean Perrin evoca unos objetos familiares de forma irregular o interrumpida*

«... más bien dirigidos al lector que acaba de terminar este libro que al que lo va a comenzar, quisiera hacer algunos comentarios cuyo interés puede ser el dar una justificación objetiva a ciertas exigencias lógicas de los matemáticos.

»Todos sabemos cómo, antes de dar una definición rigurosa, se hace observar a los principiantes que ellos mismos tienen ya la idea de la continuidad. Se traza ante ellos una curva bien clara, y se dice, aplicando una regla contra su contorno: “Veis como en cada punto hay una tangente”. O también, para sentar la noción más abstracta de la verdadera velocidad de un móvil en un punto de su trayectoria, se dirá: “Estáis de acuerdo, verdad, con que la velocidad media entre dos puntos próximos de esta trayectoria acaba por no variar apreciablemente cuando dichos puntos se acercan entre sí indefinidamente”. Y, en efecto, son muchos los que, recordando que para ciertos movimientos usuales parece que es así, no ven que esto entraña grandes dificultades.

»Los matemáticos, sin embargo, han comprendido muy bien la falta de rigor de estas consideraciones geométricas, y lo pueril de, por ejemplo, intentar demostrar, trazando una curva, que toda función continua admite una derivada. Si bien las funciones derivables son las más simples, las más fáciles de manejar, constituyen a su vez, la excepción; o bien, si se prefiere un lenguaje geométrico, las curvas que no admiten tangente son la regla, y las curvas regulares, tales como el círculo, son casos interesantísimos, pero particularísimos.

»A primera vista, esas restricciones no parecen sino un ejercicio intelectual, sin duda ingenioso, pero, en definitiva, artificial y estéril, de quien lleva hasta la manía el deseo de un rigor perfecto. Y como ocurre la mayoría de las veces, aquéllos a quienes se habla de curvas sin tangente o de funciones sin derivada empiezan pensando la naturaleza no presenta tales complicaciones y que, evidentemente, no nos sugiere esas ideas.

»Sin embargo, lo cierto es lo contrario, y la lógica de los matemáticos les ha mantenido más cerca de la realidad que las representaciones prácticas empleadas por los físicos. Esto puede ya comprenderse pensando, sin haber tomado previamente partido simplificador, en ciertos datos experimentales.

»Se presentan en abundancia tales datos al estudiar los coloides. Observamos, por ejemplo, uno de esos copos blancos que se obtienen al salar el agua jabonosa. De lejos, su contorno puede parecer claro, pero tan pronto como uno se acerca un poco, esa claridad desaparece. El ojo no consigue ya determinar la tangente en un punto cualquiera: una recta

que lo pareciera a primera vista, parecerá también, con un poco más de atención, perpendicular u oblicua al contorno. Si uno toma una lupa, o un microscopio, la incertidumbre no se desvanece, pues cada vez que se incrementa el aumento, se ven aparecer nuevas anfractuosidades, sin que se llegue nunca a sentir la impresión tranquilizadora y clara que da, por ejemplo, una bola de acero pulido. De manera que, si dicha bola da una idea útil de la continuidad clásica, lógicamente también nuestro copo puede sugerir la noción más general de las funciones continuas sin derivada.

»Y lo que hay que tener muy en cuenta es que la incertidumbre en la posición del plano tangente en un punto del contorno no es de hecho del mismo orden que la incertidumbre que habría para determinar la tangente en un punto del litoral de Bretaña, según se utilizara para ello un mapa de tal o cual escala. Según la escala, la tangente cambiaría, pero cada vez habría una. El mapa es un dibujo convencional, en el que, por la propia construcción, cada línea tiene tangente. Por el contrario, la característica esencial de nuestro copo (igual que el resto del litoral, si en vez de estudiarlo con un mapa se lo mirara directamente de más o menos lejos) es que, a cualquier escala, se *suponen*, sin verlos del todo bien, detalles que impiden definitivamente determinar una tangente.

»Seguiremos aún en la realidad experimental si, mirando por el microscopio, observamos el movimiento browniano que agita cualquier pequeña partícula en suspensión en un fluido. Para fijar una tangente a su trayectoria, tendríamos que encontrar un límite, por lo menos aproximado, a la dirección de la recta que une las posiciones de dicha partícula en dos instantes sucesivos muy próximos. Ahora bien, hasta donde permite llegar la experiencia, esta dirección varía locamente cuando se disminuye el tiempo transcurrido entre ambos instantes. De modo que lo que este análisis sugiere al observador sin prejuicios es la función sin derivada y no, en absoluto, la curva con tangente».

*P.S. Dos grados de orden en el caos: el orden euclídeo y el orden fractal*

Dejemos la lectura de Perrin (que se puede continuar en *Les Atomes*, o en mi edición de 1975), para describir la importancia histórica de estas últimas observaciones. Hacia 1920, deberían transtornar al joven Norbert Wiener y lo estimularían en la construcción de su modelo probabilístico del movimiento browniano. Hablaremos mucho de ello en este ensayo. Y desde ahora tomaremos de Wiener un término al que tenía afición para denominar una forma extrema del desorden natural. La palabra es «caos», y nos permite apreciar que Perrin hizo dos observaciones distintas. Por una parte, que la geometría de la naturaleza es caótica y está mal representada por el orden perfecto de las formas usuales de Euclides o del cálculo diferencial. Por otra, que dicha geometría más bien evoca la complicación de las matemáticas creadas hacia 1900.

Desgraciadamente, la influencia de estas observaciones de Perrin parece haber terminado con su efecto sobre Wiener. Es la obra de Wiener la que ha sido mi principal fuente de inspiración, y la filosofía de Perrin no me ha llegado más que cuando este ensayo estaba siendo sometido a las últimas correcciones. Como ocurre a veces, el dominio fractal había emergido (sin nombre) cuando abordé ciertos fenómenos caóticos completamente modestos por medio de técnicas matemáticas reputadas de «avanzadas», con las que el azar me había familiarizado. Después surgió una nueva tarea fractal, lejos de la primera, y no fue hasta mucho más tarde que estas tareas —que se habían multiplicado— se fundieron en una nueva disciplina. La geometría fractal se caracteriza por dos elecciones: la elección de problemas en el seno del caos de la naturaleza, pues describir todo el caos sería una

ambición sin esperanza ni interés, y la elección de herramientas en el seno de las matemáticas, pues buscar aplicaciones a las matemáticas por la única razón de su belleza, no ha producido otra cosa que sinsabores.

Con su maduración progresiva, esas dos elecciones han creado algo nuevo: entre el dominio del caos incontrolado y el orden excesivo de Euclides, hay a partir de ahora una nueva zona de orden fractal.

*Conceptos propuestos como solución: dimensión efectiva, figura y dimensión fractales*

La trayectoria del movimiento browniano es la más simple de entre las fractales, sin embargo el modelo propuesto por Wiener presenta ya la característica sorprendente de que se trata de una curva continua cuya dimensión fractal toma un valor enteramente anormal, a saber  $D = 2$ .

El concepto de dimensión fractal forma parte de una cierta matemática que fue creada entre 1875 y 1925. Más generalmente, una de las metas del presente ensayo consiste en mostrar cómo la colección de figuras geométricas creadas en aquella época, colección que Vilenkin 1965 califica de «Musée d'Art» matemático, y que otros califican de «Galerie des Monstres», puede visitarse también como «Palais de la Découverte». Esta colección ha sido incrementada en gran medida por mi maestro Paul Lévy (grande hasta en lo que tenía de anacrónico, como explico en el Capítulo 15), enfatizando el papel del azar.

A estas figuras geométricas nunca se les ha dado una oportunidad en la enseñanza: todo lo más, han dejado de ser un espantajo «moderno» para llegar a ser un ejemplo demasiado especial para merecer que uno se detenga a considerarlo en detalle. En este ensayo quiero darlas a conocer a través de las utilizaciones que les he encontrado. Muestre cómo el caparazón formalista que las ha aislado ha impedido que se revelara su verdadero sentido, cómo estas figuras tienen algo de extraordinariamente simple, concreto e intuitivo. No sólo pruebo que son realmente útiles, sino que pueden utilizarse prontamente, con un aparato muy ligero, sin necesidad de que uno tenga que meterse en casi ninguno de sus preliminares formales, de los que la experiencia demuestra a menudo que los que no lo ven como un desierto infranqueable acaban pronto considerándolos como un edén que no abandonarían jamás.

Estoy profundamente convencido de que la abstracción forzada, la importancia dada a la formalización, y la proliferación de los conceptos y términos, hacen a menudo más mal que bien. No soy el último que lamenta que las ciencias menos exactas, aquéllas cuyos mismos principios son los menos seguros, sean axiomatizadas, rigorizadas y generalizadas con suma pulcritud. Estoy encantado, por lo tanto, de poder discutir muchos ejemplos nuevos, para los que las relaciones entre forma y contenido se presentan de una manera clásicamente íntima.

Antes de pasar a las dimensiones que pueden ser fraccionarias, hemos de comprender mejor la noción de dimensión, desde el punto de vista de su papel en la física.

Para empezar, la geometría elemental nos enseña que un punto aislado, o un número finito de puntos, constituyen una figura de dimensión 0; que una recta, así como cualquier otra curva *standard* —este epíteto significa que se trata de la geometría euclídea usual— constituyen figuras de dimensión 1; que un plano, y cualquier otra superficie ordinaria, son figuras de dimensión 2; que un cubo tiene dimensión 3. A todo esto, los matemáticos, desde Hausdorff 1919, han añadido que para ciertas figuras ideales se puede decir que su

dimensión no es un entero sino una fracción, como por ejemplo  $1/2$ ,  $3/2$ ,  $5/2$ , ó, más a menudo, un número irracional tal como  $\log 4/\log 3 \sim 1,2618$ , o incluso la solución de una ecuación complicada.

Para caracterizar tales figuras, puede decirse de entrada, hablando toscamente, que una figura cuya dimensión esté entre 1 y 2 ha de ser más «deshilada» que una superficie ordinaria, pero más «maciza» que una línea ordinaria. En particular, si se trata de una curva, ¿no debería tener una superficie nula pero una longitud infinita? O bien, si su dimensión está entre 2 y 3, ¿no debería tener un volumen nulo? Este ensayo empieza pues por mostrar ejemplos de curvas que no tienden al infinito, pero cuya longitud entre dos puntos cualesquiera es infinita.

El formalismo esencial, por lo que a la dimensión fractal se refiere, está publicado desde hace mucho tiempo, pero sigue siendo asunto de un grupo limitado de expertos, incluso entre los matemáticos puros. Se solía leer por ahí la opinión de que tal o cual figura, a la que llamo fractal, es tan bonita que, seguramente, tendrá que servir para algo; pero esas opiniones no expresaban más que una vaga esperanza, mientras que los capítulos que vienen a continuación proponen realizaciones efectivas, que desembocan en teorías que están en pleno desarrollo. Cada capítulo trata de una clase de objetos concretos, de los que se puede decir, al igual que para las figuras ideales a las que acabamos de aludir, que su dimensión física efectiva tiene un valor anormal.

Pero ¿qué es exactamente una dimensión física efectiva? Hay ahí una noción intuitiva que se remonta a un estudio arcaico de la geometría griega, pero que merece ser reconsiderada, elaborada y vuelta a poner en un lugar de honor. Se refiere a las relaciones entre las *figuras* y los *objetos*, refiriéndose la primera palabra a las idealizaciones matemáticas, y la segunda a los datos de la realidad. En esta perspectiva, objetos tales como una bolita, un velo o un hilo —por finos que sean— habrían de representarse por figuras tridimensionales, con el mismo derecho que una bola grande.

Sin embargo, cualquier físico sabe que, de hecho, hay que proceder de un modo distinto, y que es mucho más útil considerar que las dimensiones de un velo, un hilo o una bola, en el supuesto de que sean suficientemente finos, se acercan más a 2, 1 y 0, respectivamente.

Precisemos más la segunda afirmación que acabamos de hacer: expresa que, para describir un hilo, no se pueden utilizar directamente ni las teorías que se refieren a la bola, ni las que se refieren a la línea ideal. En ambos casos hay que traducir «términos correctivos» y lo que sí es cierto es que se preferirá el modelo geométrico para el que las correcciones sean menores; con suerte, tales correcciones son tan pequeñas que, aun suprimiéndolas, el modelo sigue dando una buena idea de lo que se está estudiando. En otras palabras, la dimensión física tiene inevitablemente una base pragmática, y por tanto subjetiva; depende del grado de resolución.

A modo de confirmación, demostremos cómo un ovillo de 10 cm de diámetro, hecho con hilo de 1 mm de sección, tiene, de una manera por así decirlo latente, varias dimensiones efectivas distintas. Para un grado de resolución de 10 metros es un punto, y por lo tanto una figura de dimensión cero; para el grado de resolución de 10 cm es una bola tridimensional; para el grado de resolución de 10 mm es un conjunto de hilos, y tiene por consiguiente dimensión 1; para el grado de resolución de 0,1 mm cada hilo se convierte en una especie de columna, y el conjunto vuelve a ser tridimensional; para el grado de resolución de 0,01 mm cada columna se resuelve en fibras filiformes y el conjunto vuelve a ser unidimensional; a un nivel más fino de este análisis, el ovillo se representa por un

número finito de átomos puntuales, y el conjunto tiene de nuevo dimensión cero. Y así sucesivamente: ¡el valor de la dimensión no para de dar saltos!

El hecho de que un resultado numérico dependa así de la relación entre objeto y observador no es algo extraño a la física de este siglo. Este hecho es incluso una ilustración particularmente ejemplar de la misma. Por ejemplo, allí donde un observador ve una zona bien separada de sus vecinas, con su  $D$  característica, un segundo observador no verá más que una zona de transición gradual, que quizá no merezca un estudio separado.

Los objetos de los que trata este ensayo tienen, también, toda una serie de dimensiones distintas: la novedad consistirá en que allí donde —hasta ahora— uno no encontraba sino zonas de transición, sin una estructura claramente determinada, las identifico con las zonas fractales, cuya dimensión es, bien una fracción, bien un entero «anormal», que indica también un estado irregular o interrumpido. Acepto de buena gana que la realidad de una zona no está plenamente establecida hasta que no ha sido asociada a una verdadera teoría deductiva. Reconozco también que, exactamente igual que las entidades de Guillermo de Occam, las dimensiones no deben multiplicarse más allá de lo necesario, y que ciertas zonas fractales, en particular, pueden ser demasiado estrechas para ser dignas de distinción. Lo mejor será dejar el examen de estas dudas hasta el momento en que hayamos descrito bien su objeto.

Ya es hora de que precise de qué dominios de la física tomo mis ejemplos. Es bien sabido que uno de los primeros problemas formales que el hombre se ha planteado es la descripción de la Tierra. En manos de los griegos, la «geo-metría» dio paso a la geometría matemática. Sin embargo —¡como suele ocurrir en el desarrollo de las ciencias!— la geometría matemática olvidó muy pronto sus orígenes, sin apenas haber escarado la superficie del problema inicial. Pero por otra parte —cosa asombrosa, aunque uno se haya acostumbrado a ello— se reveló, «en las ciencias, de una eficacia increíble», según la bella expresión de Wigner 1960, «un regalo maravilloso, que no comprendemos ni merecemos, por el que debemos estar agradecidos, y del que debemos esperar que... continuará aplicándose, para bien o para mal, para nuestro gusto y quizá también para nuestro asombro, a grandes ramas del conocimiento». Por ejemplo, la geometría, exactamente tal como salió de los griegos, ha conseguido explicar triunfalmente el movimiento de los planetas, aunque siga teniendo dificultades con la distribución de las estrellas. De] mismo modo, sirvió para explicar el movimiento de las mareas y las olas, pero no la turbulencia atmosférica ni la oceánica.

En suma, nos ocupamos en primer lugar de objetos muy familiares pero demasiado irregulares para caer en el dominio de esta geometría clásica: la Tierra, la Luna, el Cielo, la Atmósfera y el Océano.

En segundo lugar, consideramos brevemente diversos objetos que, sin sernos familiares, echan luz acerca de la estructura de los que nos lo son. Por ejemplo, la distribución de los errores en ciertas líneas telefónicas resulta ser una excelente herramienta de transición. Otro ejemplo: la articulación de moléculas orgánicas en los jabones (sólidos, sin estar desechos en burbujas). Los físicos han establecido que dicha articulación está regida por un exponente de semejanza, y resulta que este exponente es una dimensión fractal. Si hubiera que generalizar este último ejemplo, el dominio de aplicación de las fractales entraría en contacto con la teoría de los fenómenos críticos, un dominio particularmente activo en la actualidad.

(P.S. Esta predicción se ha cumplido).

Todos los objetos naturales citados son «sistemas», en el sentido de que están

formados por muchas partes distintas, articuladas entre ellas, y la dimensión fractal describe un aspecto de esta regla de articulación. Pero la misma definición es igualmente aplicable a los «artefactos». Una diferencia entre los sistemas naturales y los artificiales es que, para conocer los primeros hay que utilizar la observación o la experiencia, en tanto que, para los segundos, se puede interrogar al artífice. Sin embargo, hay artefactos muy complejos, en los que han concurrido tantas intenciones, y de un modo tan incontrolable, que el resultado acaba siendo, por lo menos en parte, un «objeto de observación». En el Capítulo 11 veremos un ejemplo de ello, en el que la dimensión fractal juega un cierto papel, a saber, un aspecto de la organización de ciertos componentes de ordenador.

Examinamos finalmente el papel de la dimensión fractal en ciertos árboles de clasificación, que intervienen en la explicación de la ley de frecuencias de las palabras en el habla, así como en ciertos árboles jerárquicos que se utilizan para explicar la distribución de una de las formas de renta personal.

*Este ensayo mezcla deliberadamente la divulgación y el trabajo de investigación*

Una vez esbozado el objeto de este ensayo, nos queda ahora por examinar el estilo.

Se ha hecho un esfuerzo constante para subrayar tanto la diversidad de los temas tocados, como la unidad aportada por las fractales. Se ha hecho también un esfuerzo para desarrollar todos los problemas desde el principio, a fin de que el texto sea accesible a un público no especializado. Finalmente, para no asustar inútilmente a aquellos que no estén interesados en la precisión matemática, las definiciones se han remitido al Capítulo 14. De acuerdo con esto, se trata de una obra de divulgación.

Además, este ensayo tiene alguna apariencia de trabajo de erudición, debido al gran número de pistas históricas que he procurado seguir. Esto no suele darse en ciencia, y más si se tiene en cuenta que me he percatado de la mayoría de estas pistas demasiado tarde para que hayan influido en lo más mínimo en el desarrollo de mis trabajos. Pero la historia de las ideas me apasiona. Además, la novedad de mis principales tesis ha sido confirmada demasiado a menudo por la incredulidad malévola que han encontrado de entrada; de ahí la necesidad de buscarles un arraigo. Sin embargo —¿hay que insistir en ello?— la búsqueda de los orígenes está sujeta a controversia. Por cada autor antiguo en el que encuentro una buena idea bien expresada, corro el riesgo de encontrar un contemporáneo —a veces la misma persona en un contexto distinto— desarrollando la idea contraria. ¿Se puede alabar a Poincaré por haber concebido a los 30 años ideas que él mismo iba a condenar a los 55, sin acordarse, al parecer, de sus pecados de juventud? ¿Y qué hacer si los argumentos a favor hubieran sido tan débiles como los contrarios, y si nuestros autores se hubieran contentado con apuntar unas ideas sin tomarse la molestia de defenderlas y hacerlas aceptar? Si nuestros autores hubieran sido descuidados, ¿hay que apresurarse a relegarlos a ambos al olvido? ¿O bien hay que atribuir un poquito de gloria póstuma a aquél que se aprueba, incluso (¿sobretudo?) aunque hubiera sido un incomprendido? ¿Hay que resucitar, además, personajes cuyo rastro había desaparecido porque, de la misma forma que sólo se presta a los ricos, a menudo la obra de uno no es aceptada más que gracias a la autoridad superior de otro, que la adopta y la hace sobrevivir bajo su nombre? Stent 1972 nos incita a concluir que el ser un avanzado a la propia época no merece sino la compasión del olvido. Por mi parte, sin intención de resolver los problemas del papel de los precursores, he procurado conservar los lazos con el pasado, y subrayo algunos de ellos en los bosquejos biográficos del Capítulo 15.

Sin embargo, la meta esencial de este Ensayo es fundar una nueva disciplina científica. De entrada, el tema general, el de la importancia concreta de las figuras de dimensión fraccionaria, es completamente nuevo. Más concretamente, casi todos los resultados que se van a comentar se deben en gran parte, o en su totalidad, al autor de este Ensayo. Algunos son inéditos. Se trata pues, por todo ello, de una presentación de trabajos de investigación.

¿Era necesario reunirlos así? ¿Había que intentar divulgar unas teorías apenas acabadas de nacer? Mi esperanza es que el lector juzgue por sí mismo.

Antes de animar al lector a conocer nuevos útiles del pensamiento, creo necesario y justo caracterizar cuál va a ser, en mi opinión, la contribución de los mismos. El progreso de los formalismos matemáticos nunca ha sido mi objetivo fundamental y, de todos modos, lo que yo haya podido contribuir en este sentido no tiene cabida en este Ensayo.

Algunas aplicaciones menores simplemente han formalizado y dado nombre a conceptos ya conocidos. Si (frustrando mis esperanzas) este primer paso no va seguido de otros, no tendrá sino un interés estético o cosmético. Al ser las matemáticas un lenguaje, no sólo pueden servir para informar, sino también para seducir, y hay que guardarse de los conceptos que Henri Lebesgue ha calificado tan acertadamente de «ciertamente nuevos, pero que no sirven para otra cosa que para ser definidos».

Afortunadamente, mi empresa ha salvado este riesgo. En efecto, en la mayoría de casos los conceptos de objeto fractal y dimensión fractal son enteramente positivos, y contribuyen a despejar algo fundamental. Parafraseando a H. Poincaré, no atacan cuestiones que uno se plantea sino cuestiones que se plantean por sí solas con insistencia. A fin de subrayarlo, me esfuerzo en la medida de lo posible en partir de lo que pudiera llamarse una paradoja concreta. Preparo la escena mostrando cómo datos experimentales obtenidos por caminos distintos parecen estar en contradicción; si resulta que cada uno de ellos es incontestable, ahogo por hacer aceptar que el marco conceptual inconsciente, en cuyo seno son interpretados, es radicalmente inadecuado. Termino resolviendo cada una de estas paradojas mediante la introducción de una fractal y una dimensión fractal —traídos sin dolor y casi sin darse cuenta.

El orden de presentación está regido simplemente por la comodidad de la exposición. Por ejemplo, esta obra comienza con problemas acerca de los que probablemente el lector no habrá reflexionado. Esto le habrá preservado de tener prejuicios al respecto. Además, el final de la discusión entablada en los Capítulos 2 y 3 tiene lugar en el Capítulo 7, en un momento en que el lector ya estará habituado al modo de pensar fractal.

La exposición es facilitada por multitud de ejemplos. En efecto, tenemos un buen número de temas distintos a explorar y resulta que cada teoría fractal los aborda en un orden diferente. Por consiguiente, todos esos temas van a encontrarse sin dificultad, aunque no me propongo desarrollar más que las partes de cada que no presenten grandes dificultades técnicas.

Hago notar que algunos pasos, más complicados que la media de la exposición, pueden saltarse sin perder el hilo del argumento. Las figuras se reunido al final de cada capítulo. Los pies de figura incluyen numerosos complementos al texto, y forman por tanto parte integrante del conjunto, mientras que varios complementos de carácter matemático se han remitido al Capítulo 14.

## Capítulo 2

### ¿Cuánto mide la costa de Bretaña?

En este capítulo, el estudio de la superficie de la Tierra sirve para introducir una primera clase de fractales; las curvas conexas de dimensión superior a 1. Aprovechamos además la ocasión para regular algunas cuestiones de aplicabilidad más general.

Tomando un trozo de costa marítima en una región accidentada, trataremos de medir su longitud efectiva. Es evidente que dicha longitud es mayor o igual que la distancia en línea recta entre los extremos de nuestro pedazo de curva; que, si la costa fuera recta, este primer paso daría la solución del problema; en fin, que una costa salvaje de verdad es sumamente sinuosa y, por consiguiente, más larga que dicha distancia en línea recta. Esto puede ser tenido en cuenta de diversas maneras pero, en cualquier caso, la longitud final resultará ser tan grande que, a fines prácticos, se la puede considerar infinita.

Cuando queramos comparar a continuación los «contenidos» de costas distintas, no podremos evitar introducir distintas formas de un concepto matemático que nadie había creído que tuviera aplicación concreta alguna, se trata del concepto de dimensión fractal.

*La diversidad de los métodos de medida*

He aquí un primer método: se pasea sobre la costa un compás de abertura dada  $\eta$ , comenzando cada paso donde termina el anterior. El valor de  $\eta$  multiplicado por el número de pasos nos dará una longitud aproximada  $L(\eta)$ . Si se repite la operación reduciendo cada vez más la abertura del compás, se encuentra que  $L(\eta)$  tiende a aumentar sin límite. Antes de discutir esta comprobación, podemos observar que el principio en que se basa el procedimiento comentado consiste de entrada en reemplazar el objeto a medir, que es demasiado irregular, por una curva más manejable, arbitrariamente suavizada o «regularizada». La idea general se ilustra bien (recordemos la imagen utilizada por Jean Perrin) por un papel de estaño que envuelve una esponja sin seguir verdaderamente su contorno.

Aunque tal regularización resulta inevitable, puede hacerse igualmente de otras maneras: así, por ejemplo, se puede imaginar un hombre que anda a lo largo de una costa siguiendo el camino más corto posible sin separarse de ella más de una cierta distancia establecida  $\eta$ ; luego, se repite haciendo cada vez más pequeña dicha distancia máxima del hombre a la costa. Después de esto se sustituye al hombre por un ratón, después por una mosca, y así sucesivamente. Cuanto más cerca de la costa se quiera uno mantener, tanto mayor será, inevitablemente, la distancia a recorrer.

Un método más: para evitar la asimetría entre tierra firme y agua establecida por el segundo método, se pueden considerar todos los puntos de una y otra que disten a lo más  $\eta$  de la costa. Así pues, se imagina que la costa está recubierta a la perfección por una banda de anchura  $2\eta$ ; se mide la superficie de dicha banda y se divide por  $2\eta$ , como si fuera un rectángulo. Y finalmente, un cuarto procedimiento: se imagina un mapa dibujado por un pintor puntillista, que utiliza «puntos gruesos» de radio  $\eta$ ; en otras palabras, se recubre la costa con círculos de radio menor o igual que  $\eta$ .

Ya debe de haber quedado claro que cuando se hace que  $n$  sea cada vez menor,

todas las longitudes aproximadas aumentan. Siguen aumentando incluso cuando  $\eta$  es del orden del metro, sin significado geográfico alguno.

Antes de plantearse otras cuestiones acerca de la regla que rige esta tendencia, asegurémonos del significado de lo que acabamos de establecer. Para ello, repitamos las mismas medidas substituyendo la costa salvaje de Brest del año 1000 por la de 1975, domada por el hombre. El argumento de más arriba se podría aplicar en otro tiempo, pero hoy en día se ha de modificar; todas las maneras de medir la longitud con una «aproximación  $\eta$ » dan un resultado que aumenta hasta que la unidad disminuye hasta unos 20 metros; pero a continuación se encuentra una zona en la que  $L(\eta)$  varía muy poco, y no vuelve a aumentar hasta los  $n$  menores que 20 centímetros, es decir, tan pequeños que la longitud empieza a tener en cuenta las irregularidades de las piedras. Así pues, si se traza una gráfica de la longitud  $L(\eta)$  en función del paso  $\eta$ , aparece en la actualidad una especie de meseta, que no aparecía en el pasado. Ahora bien, cada vez que se quiere agarrar un objeto que no para de moverse es bueno precipitarse sobre él desde el preciso momento en que se detiene, pues no durará más que un instante; diremos, así pues, de muy buena gana que, para el Brest de hoy, un cierto grado de precisión en la medida de las longitudes de las costas se ha hecho intrínseco.

Pero este «intrínseco» es del todo antropocéntrico, pues es el tamaño de las mayores piedras que el hombre puede desplazar, o de los bloques de cemento que le gusta hacer. La situación no era muy diferente en el pasado, ya que la mejor  $\eta$  para medir la costa no era ni la del ratón ni la de la mosca, sino la de un hombre adulto. El antropocentrismo intervenía ya entonces, aunque de un modo distinto; por lo tanto, de un modo u otro, el concepto aparentemente inofensivo de la extensión longitudinal geográfica no es del todo «objetivo», ni lo ha sido jamás. El observador interviene en su definición de manera inevitable.

*Datos empíricos de Lewis Fry Richardson*

La variación de la longitud aproximada  $L(\eta)$  fue estudiada empíricamente por Richardson 1961. Veremos en el Capítulo 15 que Lewis Fry Richardson fue un sabio admirable, aunque a menudo su originalidad se tomara por excentricidad, y no haya alcanzado la celebridad que merecía. En el Capítulo 8 veremos que son debidas a él ideas profundas referentes a la naturaleza de la turbulencia. Rehuía los formalismos, sin vacilar en emplear conceptos finos y precisos allí donde él los creía útiles. Entre los papeles que dejó a su muerte, se han encontrado las gráficas reproducidas en la Figura 41, que inducen a concluir que  $L(\eta)$  es proporcional a  $\eta^{-\alpha}$ . El valor de  $\alpha$  depende de la costa elegida, y distintos tramos de la misma costa, considerados separadamente, dan a menudo distintos valores de  $\alpha$ . A los ojos de Richardson,  $\alpha$  era un mero exponente, sin ningún significado particular. Pero su valor parece ser independiente del método elegido para estimar la longitud y, por lo tanto, el parámetro merece ser considerado con detenimiento.

*Primeras formas de la dimensión fractal*

Mi primera contribución a este dominio, cuando Mandelbrot 19675 —por así decirlo— el trabajo de Richardson de una colección en la que hubiera podido permanecer perdido por siempre jamás, consistió en interpretar el exponente  $1 + \alpha$  como una «dimensión fractal». Vamos pues a denotarla por  $D$ . Reconozco, en efecto, que cada uno de los procedimientos para evaluar  $L(\eta)$ , enumerados hace un instante, corresponde a una

definición de la dimensión, definición ya utilizada en matemática pura, pero que nadie había pensado nunca que pudiera también aplicarse a lo concreto.

Por ejemplo, la definición que se basa en recubrir la costa por puntos gruesos de radio  $\eta$  es precisamente la utilizada por Pontrjagin y Schnirelman 1932 para definir la dimensión de recubrimiento; la idea de la definición basada en el recubrimiento por una banda de anchura  $2\eta$  fue utilizada por Minkowski 1901; otras definiciones están relacionadas con la épsilon-entropía de Kolmogorov y Tihomirov 1959-1961. Pero estas definiciones, estudiadas en el Capítulo 14, son demasiado formales para ser verdaderamente explícitas. Vamos ahora a examinar con más detalle un concepto análogo pero mucho «más rico» desde el punto de vista geométrico: el de dimensión de Hausdorff-Besicovitch, así como el concepto sencillo y explícito de dimensión de homotecia.

Una tarea más fundamental consiste en representar y explicar la forma de las costas por medio de un valor  $D$  que satisfaga la desigualdad  $D > 1$ . Abordaremos esto en el Capítulo 7. Baste avanzar que encontraremos, en primera aproximación,  $D = 1,5$ , valor demasiado grande para explicar bien los hechos, pero más que suficiente para establecer que es «natural» que la dimensión sea superior a  $D = 1$ .

Señalemos finalmente que, incluso aquél que no acepte mis razones para considerar  $D > 1$  para una costa, no sabría volver a la situación ingenua en la que aceptaba  $D = 1$  sin mayor reflexión; quienquiera que crea que éste es el caso estará, en lo sucesivo, obligado a justificar su posición.

#### *Dimensión (fractal) de contenido o dimensión de Hausdorff-Besicovitch*

Si se admite que diversas costas naturales tienen «en realidad» una longitud infinita, y que sus longitudes antropocéntricas no dan más que una idea sumamente parcial, ¿cómo se pueden comparar dichas longitudes? Dado que el infinito es igual a cuatro veces el infinito, se puede decir que cualquier costa es cuatro veces más larga que cada uno de sus cuartos, pero éste es un resultado que carece de verdadero interés. ¿Cómo, pues, expresar la idea fuertemente arraigada de que toda curva tiene un «contenido» cuatro veces mayor que cada uno de sus cuartos? Para este fin existe un procedimiento, debido a Hausdorff, que vamos a examinar a continuación.

Su motivación intuitiva parte de los hechos siguientes: un contenido lineal se calcula sumando pasos  $\eta$  no transformados, es decir, elevados a la potencia 1, que es la dimensión de la recta, y el contenido de una superficie formada por cuadritos pequeños se calcula sumando los lados de estos cuadrados elevados a la potencia 2, que es la dimensión del plano. Procedamos igual en el caso de la forma aproximada de una costa que está implícita en el primer método de medida de longitudes. Es una línea quebrada, formada de pequeños segmentos de longitud  $\eta$  y enteramente recubierta por la reunión de los círculos de radio  $\eta$ , centrados en los puntos utilizados para la medida. Si se elevan estos pasos a la potencia  $D$ , obteniendo de este modo un «contenido aproximado en dimensión  $D$ », se constata que dicho contenido varía poco al variar  $\eta$ . En otras palabras, constatamos que la dimensión definida formalmente más arriba se comporta como de costumbre: el contenido calculado en cualquier dimensión  $d$  menor que  $D$  es infinito, pero si  $d$  es superior a  $D$ , el contenido se anula, y se comporta razonablemente para  $d = D$ . La definición precisa del «contenido», debida a Hausdorff (1919) y elaborada por Besicovitch, es necesariamente bastante más delicada, pero sus complicaciones (esbozadas en el Capítulo 14) no nos conciernen ahora.

## *Dos conceptos intuitivos esenciales: homotecia interna y cascada*

Hemos insistido hasta aquí en la complicación y el desorden que caracterizan las costas consideradas como figuras geométricas. Examinemos ahora un orden que les es subyacente: de hecho, aunque las costas son muy irregulares, los grados de irregularidad que corresponden a distintas escalas son, *grosso modo*, iguales. Es, en efecto, asombroso que cuando una bahía o una península que estaban representadas en un mapa a escala 1/100.000, se examinan de nuevo en un mapa a 1/10.000, se observa que sus contornos están formados por innumerables sub-bahías y sub-penínsulas. En un mapa a 1/1.000, se ven aparecer también sub-sub-bahías y sub-sub-penínsulas, y así sucesivamente. Esta iteración no se puede continuar indefinidamente, pero se puede ir muy lejos, y se encontrará que, aunque los distintos mapas correspondientes a los sucesivos niveles de análisis sean completamente diferentes en lo que tienen de específico, tienen el mismo carácter global, los mismos rasgos genéricos. En otras palabras, que todo induce a creer que, a excepción de la escala, el mismo mecanismo hubiera podido engendrar tanto los pequeños detalles de las costas como los grandes.

Se puede pensar en este mecanismo como una especie de cascada, o más bien como un fuego de artificio por etapas, en el que cada etapa engendra detalles más pequeños que la que la precede. Cuando, hablando estadísticamente, cada pedazo de costa es homotético al todo —salvo detalles de los que decidimos no ocuparnos— se dirá que la costa posee una homotecia interna.

Al ser este último concepto fundamental pero delicado, empezaremos afinándolo mediante una figura más regular que los matemáticos nos habían ya preparado sin saber para qué iba a servir. Veremos a continuación cómo sirve para medir el grado de irregularidad de las curvas por la intensidad relativa de los grandes y los pequeños detalles, y fin de cuentas —por una dimensión de homotecia.

*Modelo basto de la costa de una isla: la curva en forma de copo de nieve de von Koch*

La cascada geométrica de una costa puede simplificarse, como indican las Figuras 42 y 43. Supongamos que un trozo de costa trazada de un modo simplificado a escala 1/1.000.000 es, así a lo tonto, un triángulo equilátero. Que el nuevo detalle visible en un mapa a 3/1.000.000 sea el resultado de substituir el tercio central de cada lado por un promontorio en forma de triángulo equilátero, es decir, que cada lado se convierta en una figura formada por cuatro segmentos iguales. Que el nuevo detalle que aparece al 9/1.000.000 consista en substituir cada uno de estos cuatro segmentos por cuatro sub-segmentos de la misma forma, pero menores, guardando una proporción de un tercio y formando sub-promontorios. Continuando así hasta el infinito, se llega a un límite denominado curva de von Koch 1904. Se trata de una figura célebre que Cesàro 1905 describe en los términos extáticos siguientes: «Es esta similitud entre el todo y sus partes, incluso las infinitesimales, lo que nos lleva a considerar la curva de von Koch como una línea verdaderamente maravillosa entre las líneas. Si estuviera viva, no sería posible aniquilarla sin suprimirla de golpe, pues renacería sin cesar de las profundidades de sus triángulos, como la vida en el universo».

Se trata claramente de una curva y, en particular, su área es nula, pero cada etapa de

su construcción aumenta, con toda evidencia, la longitud total en un factor  $4/3$ , con lo que la curva de von Koch tiene una longitud infinita —exactamente igual que una costa—. Además, y esto es importante, es una curva continua, aunque no tenga tangente en prácticamente ninguno de sus puntos; es un objeto geométrico emparentado con las funciones continuas sin derivada.

Cualquier tratado de matemáticas que hable de ella subraya en seguida que es necesariamente un monstruo que carece de interés concreto. Y el físico que lee eso no puede evitar estar de acuerdo con ello. Aquí, sin embargo, no se permite sacar esta conclusión por cuanto ¡la curva de von Koch ha sido introducida precisamente como modelo simplificado de una costa! Si, de hecho, este modelo es inaceptable, no es en absoluto porque sea demasiado irregular, sino porque —en comparación con una costa— su irregularidad es demasiado sistemática. ¡Su desorden no es excesivo, sino insuficiente!

Nos quedan por citar a este respecto dos grandes matemáticos que, a pesar de no haber contribuido personalmente a la ciencia empírica, tenían un agudo sentido de lo concreto. Lévy 1970 escribía: «Sin duda que nuestra intuición preveía que la falta de tangentes y la longitud infinita de la curva están relacionados con recodos infinitamente pequeños que es impensable dibujar. (Insisto en este papel que juega la intuición porque siempre me ha sorprendido oír decir que la intuición geométrica conducía fatalmente a pensar que toda función continua era derivable. Desde mi primer encuentro con el concepto de derivada, mi experiencia personal me había probado lo contrario). Pero uno se queda confuso ante la impotencia de nuestra imaginación para ir tan siquiera más allá de las primeras etapas de la construcción de estos recodos infinitamente pequeños».

En la misma línea, resumiendo un estudio apasionante (que no llegó, sin embargo, hasta el concepto de dimensión), Steinhaus 1954 escribía: «Nos reconciamos con la realidad al considerar que la mayoría de los arcos que se encuentran en la naturaleza son no rectificables. Esta afirmación es contraria a la creencia de que los arcos no rectificables son una invención de los matemáticos, y que los arcos naturales son rectificables; lo cierto es precisamente lo contrario».

He buscado otras citas del mismo estilo, pero no he podido encontrarlas.

Menudo contraste entre mis argumentos y citas y la célebre invectiva de Charles Hermite (1822-1901), que no se preocupaba sino por el rigor y por una cierta idea de pureza que él había inventado, y que declaraba (en una carta a Stieltjes) que «abandonaba con espanto y horror esta plaga lamentable de las funciones que no tienen derivada». (Nos gustaría creer que esta frase era irónica, pero un recuerdo de Henri Lebesgue sugiere lo contrario: «había enviado a M. Picard una nota acerca de las superficies aplicables sobre el plano: Hermite intentó oponerse a su inserción en los *Comptes Rendus de l'Académie*, esto ocurría más o menos en la época en que escribía...» ...sigue el texto citado hace un momento).

*El concepto de dimensión de homotecia  $D$ .*

*Curvas fractales cuya  $D$  está comprendida entre 1 y 2*

Las longitudes de las aproximaciones sucesivas de la curva de von Koch pueden medirse exactamente y el resultado es muy curioso: tiene exactamente la misma forma que la ley empírica de Richardson referente a la costa de Bretaña, esto es:  $L(\eta) \propto \eta^{1-D}$ . Una diferencia importante es que esta vez  $D$  no es una magnitud que haya de ser estimada empíricamente, sino una constante matemática que, como se ve fácilmente, vale  $\log 4/\log 3$

~ 1,2618. Este comportamiento permitirá definir la dimensión de homotecia, nuevo avatar de la dimensión fractal. Examinaremos aquí también otras variantes de la curva de von Koch a fin de calcular sus dimensiones, comprendidas todas ellas entre 1 y 2.

El procedimiento parte de una propiedad elemental que caracteriza el concepto de dimensión euclídea en el caso de objetos geométricos sencillos que poseen una homotecia interna. Se sabe que si se transforma una recta por una homotecia de razón arbitraria, cuyo centro esté contenido en la propia recta, se encuentra la misma recta, y lo mismo sucede con un plano y con el espacio euclídeo entero. Del hecho de que una recta tenga dimensión euclídea  $E = 1$ , se sigue que, cualquiera que sea el entero  $K$ , el «todo» constituido por el segmento de recta  $0 < x < X$  puede ser «adoquinado» exactamente (estando cada punto recubierto una vez y sólo una) por  $N = K$  «partes», que son segmentos («semiabiertos») de la forma  $(k - 1)X/K \leq x < kX/K$ , donde  $k$  varía entre 1 y  $K$ . Cada parte se obtiene del total por medio de una homotecia de razón  $r(N) = 1/N$ . Análogamente, del hecho de que un plano tenga dimensión euclídea  $E = 2$ , se sigue que, cualquiera que sea  $K$ , el todo constituido por el rectángulo  $0 \leq x < X; 0 \leq y < Y$ , puede adoquinarse exactamente con  $N = K^2$  partes, a saber, los rectángulos

$$(k - 1)X/K \leq x < kX/K; (h - 1)Y/K \leq y < hY/K,$$

variando  $k$  y  $h$  entre 1 y  $K$ . Ahora, cada parte se deduce del todo mediante una homotecia de razón  $r(N) = 1/K = 1/N^{1/2}$ . Para un paralelepípedo rectángulo, un argumento parecido nos da  $r(N) = 1/N^{1/3}$ . En fin, ya se sabe que no hay ningún problema serio en definir espacios de dimensión euclídea  $D$ , con  $D > 3$ ; en este caso se tiene que  $r(N) = 1/N^{1/D}$ . Así pues, en todos los casos clásicos, en que la dimensión euclídea es «evidentemente» un entero, se tiene:

$$\log r(N) = \log (1/N^{1/D}) = -(\log N)/D,$$

o bien

$$D = -\log N / \log r(N) = \log N / \log(1/r).$$

Esta última igualdad es la que vamos a generalizar. Para ello, observemos que la expresión de la dimensión, en tanto que exponente de homotecia, sigue teniendo un significado formal para toda figura que —como la curva de von Koch— sin ser un segmento ni un cuadrado, cumple que el todo es descomponible en  $N$  partes, las cuales se pueden deducir de él por una homotecia de razón  $r$  (seguida de un desplazamiento o de una simetría). Esto demuestra que, por lo menos formalmente, el dominio de validez del concepto de dimensión de homotecia va más allá de los paralelepípedos y que, como novedad, el  $D$  así obtenido no tiene por qué ser entero. Por ejemplo, en el caso de la curva de von Koch,  $N = 4$  y  $r = 1/3$ , con lo que  $D = \log 4 / \log 3$ . Se puede también variar la construcción de von Koch modificando la forma de los promontorios y añadiendo bahías como por ejemplo en las Figuras 44 y 45. Se obtienen así, en cierto modo, las primas de dicha curva, de dimensiones iguales a  $\log 5 / \log 4$ ,  $\log 6 / \log 4$ ,  $\log 7 / \log 4$  y  $\log 8 / \log 4 = 1,5$ . Después, la Figura 47 muestra una variante, interpretándola a renglón seguido de una nueva manera concreta.

*El problema de los puntos dobles. La curva de Peano que llena el plano*

Es fácil verificar que ninguna de nuestras curvas al estilo de von Koch tiene puntos

dobles. Pero no tendría ya por qué ocurrir lo mismo si se extendiera la misma construcción con la esperanza de obtener un valor de  $D$  demasiado grande. Por ejemplo, la Figura 49 muestra qué ocurre en el caso  $r = 1/3$ ,  $N = 9$ . Formalmente obtenemos  $D$  igual a 2, pero la curva límite correspondiente, que es una curva de Peano, tiene inevitablemente una infinidad de puntos dobles; se sigue de esto que, para dicha curva, el concepto de adoquinado cambia de significado, y que la definición de homotecia es, en estos casos, discutible.

#### *Dimensión de homotecia generalizada*

Supongamos que una figura sea descomponible en  $N$  partes tales que, dos a dos, no tienen ningún punto común, pero que cada una sea deducible del total por una homotecia de razón  $r_n$ , seguida eventualmente de una rotación o una simetría. En el caso en que todas las  $r_n$  sean idénticas, sabemos que la dimensión de homotecia es  $D = \log N / \log (1/r)$ . A fin de generalizar este concepto, consideremos  $g(d) = \sum_{n=1}^N r_n^d$  como función de  $d$ ; cuando  $d$  varía de 0 a  $\infty$  esta función decrece continuamente desde  $n$  a 0, y pasa una vez y sólo una por el valor 1. Así pues, la ecuación  $g(d) = 1$  tiene una única raíz positiva, que designaremos por  $D$ , y que generaliza la dimensión de homotecia.

$D$  conserva un cierto sentido cuando las partes tienen puntos dobles en cantidad «suficientemente pequeña»; en otras palabras, en general hay que tratar la  $D$  formal con precaución; la falta de atención puede llevar a los peores absurdos, como se ve en la Figura 50.

#### *Sentido físico de las dimensiones fractales, cuando uno se niega a pasar al límite. Cortaduras interna y externa*

Para obtener la curva de von Koch, el mecanismo de adición de nuevos promontorios, cada vez menores, se extiende indefinidamente. Ello es indispensable para que se verifique la propiedad de homotecia interna, y para que, por consiguiente, una definición u otra de la dimensión fractal tenga sentido. Resulta que, en el caso de las costas, la suposición según la cual los promontorios se van añadiendo indefinidamente es razonable, aunque la homotecia interna no sea válida más que dentro de ciertos límites. En efecto, para escalas sumamente pequeñas, el concepto de costa ya no pertenece a la geografía. Hablando estrictamente, el detalle de la interfase entre el agua, el aire y la piedra pertenece a la física molecular; es pues necesario detenerse antes, y preguntarse qué es lo que ocurre cuando el paso al infinito está prohibido.

Es razonable suponer que la costa real está sometida a dos «cortaduras». Su «cortadura externa»  $\Lambda$  se mide en decenas o centenares de kilómetros; para una costa que no formara bucles,  $\Lambda$  podría ser la distancia entre los dos extremos; para una isla,  $\Lambda$  podría ser el diámetro del menor círculo que contenga toda la costa. La «cortadura interna», por su parte, se mide en centímetros.

Sin embargo, aún en este caso, el número  $D$  conserva el significado de una «dimensión física efectiva», bajo la forma en que se ha descrito este concepto en el Capítulo 1. Tanto intuitiva como pragmáticamente (desde el punto de vista de la simplicidad y de la naturaleza de los términos correctivos necesarios), una aproximación de alto grado a la curva original de von Koch se acerca más a una curva de dimensión  $\log 4 / \log 3$  que a una curva rectificable de dimensión 1. En suma, una costa es como un ovillo

de hilo. Es razonable decir que, desde el punto de vista de la geografía (es decir, en la zona de las escalas comprendidas entre un metro y cien kilómetros), la dimensión de la costa es el  $D$  estimado por Richardson. Lo que no excluye que, desde el punto de vista de la física, tenga una dimensión distinta, que estará asociada al concepto de interfase entre agua, aire y arena, y que sería por ello insensible a las variadas influencias que dominan la geografía.

Resumiendo, el físico tiene razón al tratar el paso al límite matemático con prudencia. La dimensión fractal implica un paso de este tipo, y es por tanto motivo de sospecha. He perdido la cuenta de las veces que un físico o un ingeniero me lo han hecho notar. Es quizás a causa de esta desconfianza que el papel físico de la dimensión fractal no se ha descubierto antes de mis propios trabajos. Pero vemos que, en el caso que nos ocupa, la aplicación de lo infinitesimal a lo finito no ha de provocar ningún temor si se hace con prudencia.

LÁMINA 41. *Longitudes aproximadas de las costas, según Lewis Fry Richardson*

En el caso del círculo, que esta figura trata como si fuera una curva empírica, se ve claramente que la longitud aproximada  $L(\eta)$  varía como debe: tiende hacia un límite para  $\eta \rightarrow 0$ . En todos los casos restantes,  $L(\eta)$  crece indefinidamente. Esta figura se ha tratado en coordenadas bilogarítmicas; si se denota la pendiente de cada gráfica por  $1 - D$ , ésta nos da el método más directo de estimación de la dimensión fractal  $D$ .

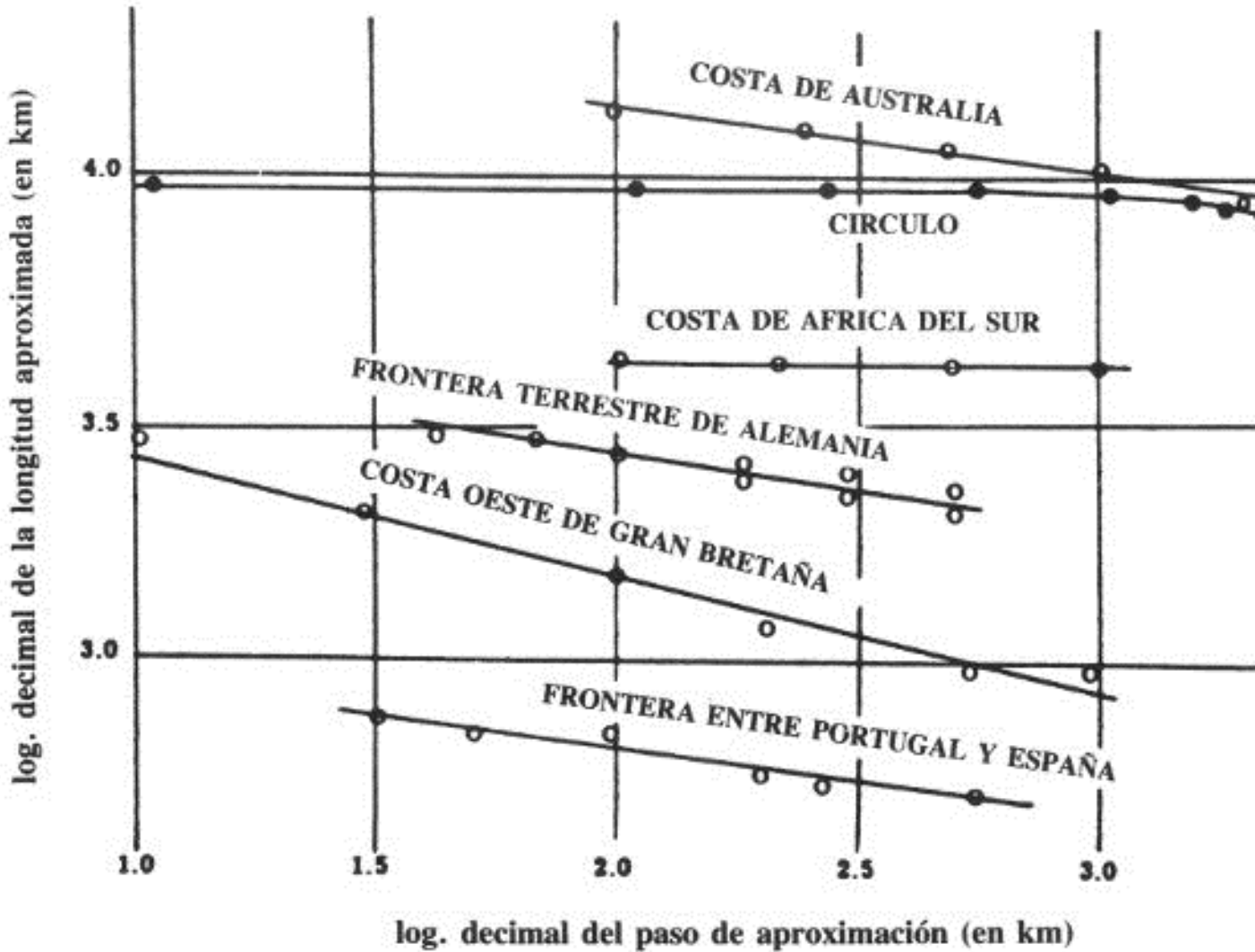


FIGURA 41

LÁMINAS 42 y 43. *La curva de von koch y la isla quimérica en forma de copo de nieve*

El ejemplo clásico de curva continua no rectificable y con homotecia interna lo constituye el tercio inferior del límite del presente diagrama. Éste se denomina «Curva de von Koch» y el interior de la curva se llama a menudo «copo de nieve», aunque yo prefiero la denominación «Isla de von Koch».

$$D = \log_3 4 \sim 1,26$$

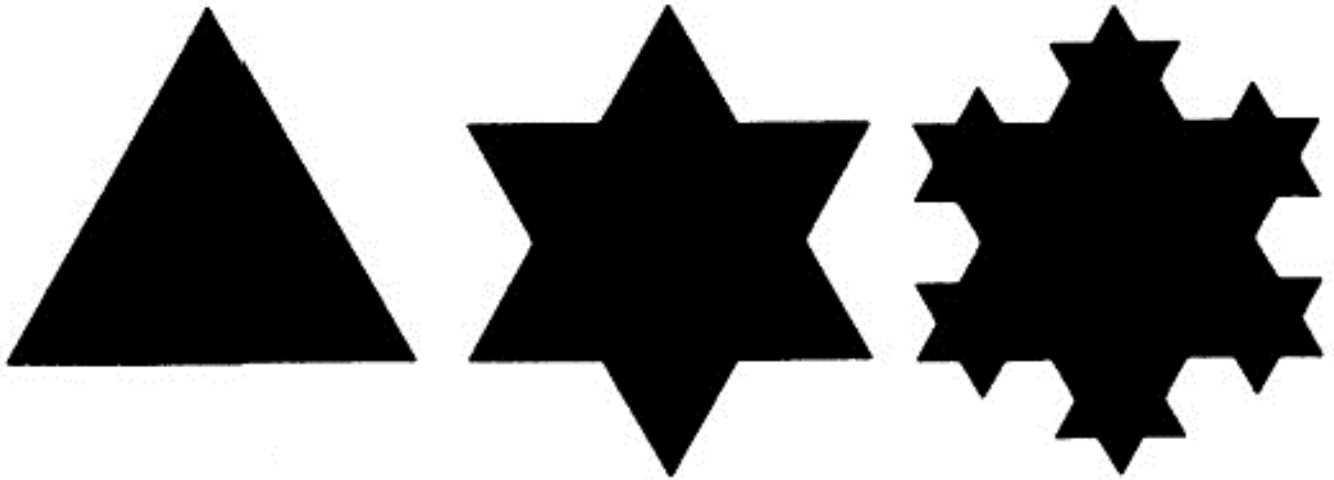


FIGURA 42

La construcción de la figura 42 parte de una isla en forma de triángulo equilátero. A continuación, en el tercio central de cada uno de los tres lados, se dispone un cabo en forma de  $\Delta$  con los lados iguales a un tercio. Se obtiene así un hexágono regular estrellado o Estrella de David, cuyo perímetro tiene una longitud de  $12 \times 1/3 = 4$ . Se hace lo mismo con cada uno de sus 12 lados, y así sucesivamente, obteniendo como resultado la figura 43a.

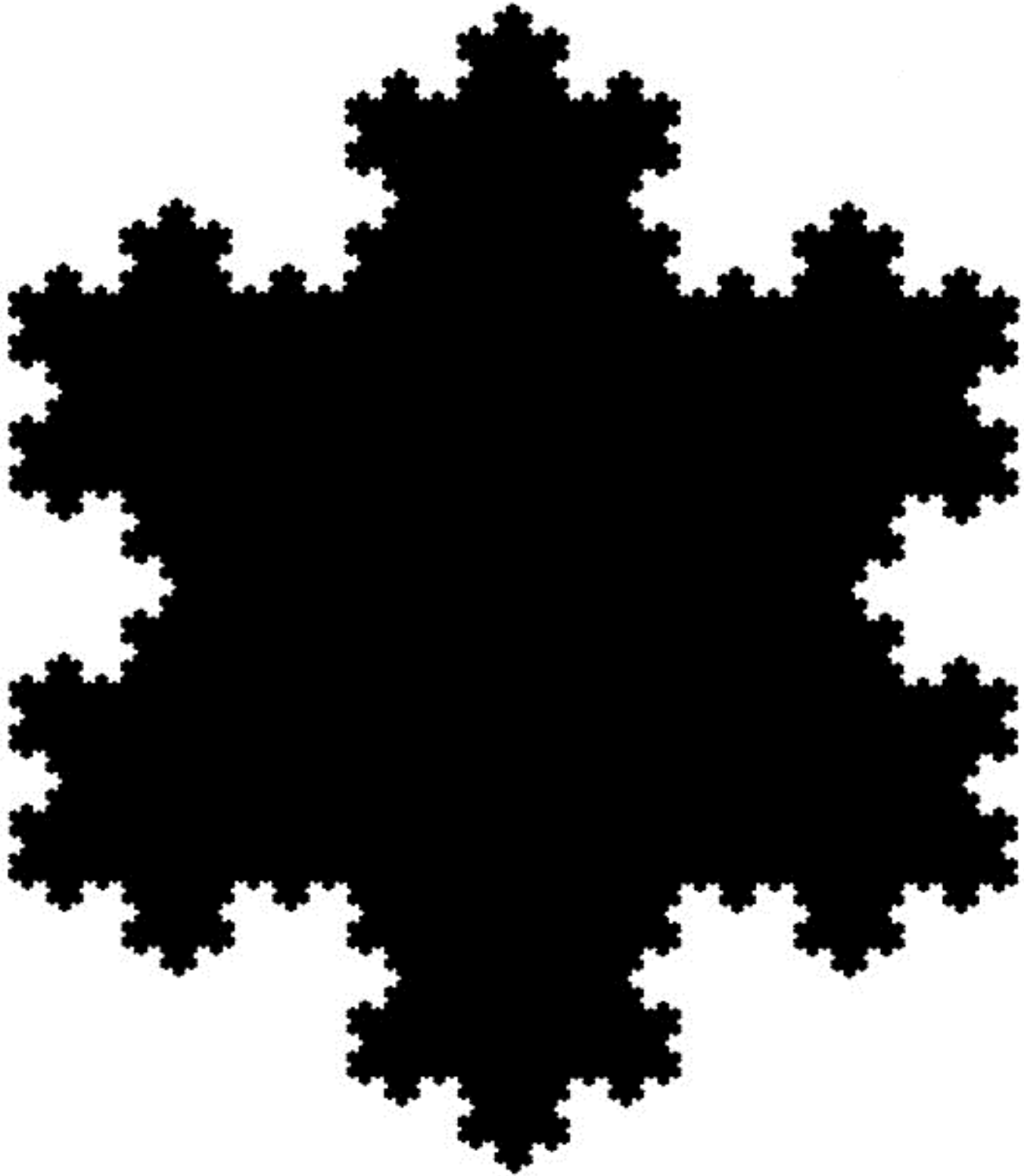


FIGURA 43a

Se constata fácilmente que la isla de von Koch se inscribe de forma natural en un hexágono regular convexo. De ahí un segundo método de construcción, en cierto modo

inverso del descrito más arriba, que consiste en suprimir bahías de un hexágono. Cesàro ha combinado ambos métodos y la figura 43b muestra cómo se obtiene la curva, esto es, el contorno de la isla de von Koch, como límite de una superficie más y más deshilada.

$$D \sim 1,26$$



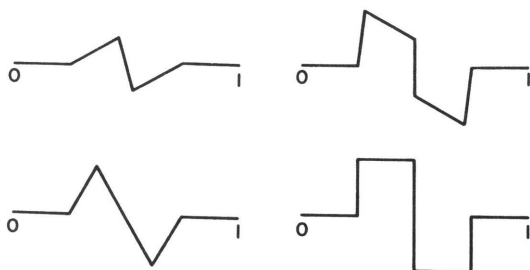
FIGURA 43b

LÁMINAS 44 y 45. *Método de von Koch generalizado*

Cada una de las gráficas de más abajo nos proporciona la receta de construcción de una generalización de la curva de von Koch. En cada caso,  $r = 1/4$ , con lo que la dimensión es una fracción de denominador  $\log(1/r) = \log 4$ . La construcción parte del intervalo  $[0,1]$ , lo sustituye luego por uno de los «generadores» A, B, C, ó D, a continuación sustituye cada segmento del generador por una reducción a  $1/4$  del propio generador, y así sucesiva e indefinidamente. Es importante subrayar que ninguna de estas curvas tiene puntos dobles, contrariamente a lo que ocurre con la curva de Peano de la Figura 49.

A:  $D = \log_4 5 \sim 1,16$

C:  $D = \log_4 7 \sim 1,40$



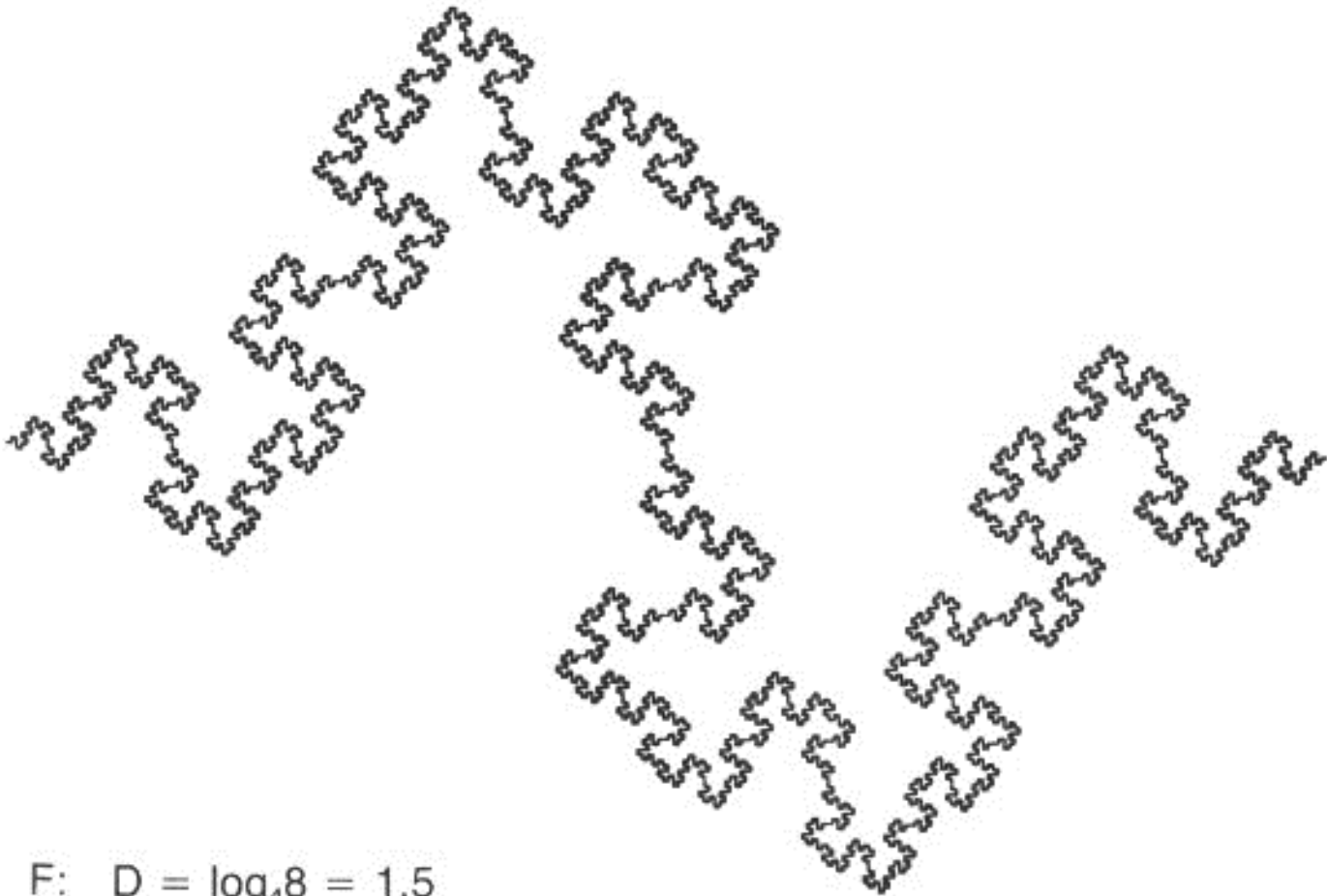
B:  $D = \log_4 6 \sim 1,29$

D:  $D = \log_4 8 = 1,5$

FIGURA 44

Cuatro iteraciones a partir de los generadores A ó D dan como resultado las aproximaciones a las curvas fractales que se muestran en la figura siguiente. La curva F tiene una dimensión excesiva comparada con la mayoría de las costas naturales. Por el contrario, la curva E tiene una dimensión demasiado pequeña.

E:  $D = \log_4 5 \sim 1,16$



F:  $D = \log_4 8 = 1,5$

FIGURA 45

Cuando el diagrama de la figura 44 no tiene segmentos verticales, define una función  $y = f_0(x)$ ; este hecho, puede servir igualmente para la construcción siguiente.  $f_1(x)$  se define como la función periódica, de período  $1/4$ , igual, para  $1 \leq x < 1/4$ , a

$3^{-1} f_1(4x)$ . Asimismo,  $f_n(x)$ , de período  $4^{-n}$ , será igual para  $0 \leq x < 4^{-n}$ , a  $3^{-n} f_0(4^n x)$ . La serie  $\sum f_n(x)$  obtenida así es convergente por doquier, y su suma es continua, pero no es derivable. Weierstrass estudió una construcción bastante parecida, y mucho más conocida, en la que las «partes»  $f_n(x)$  son sinusoides.

LÁMINA 47. *Esquema arborescente del pulmón*

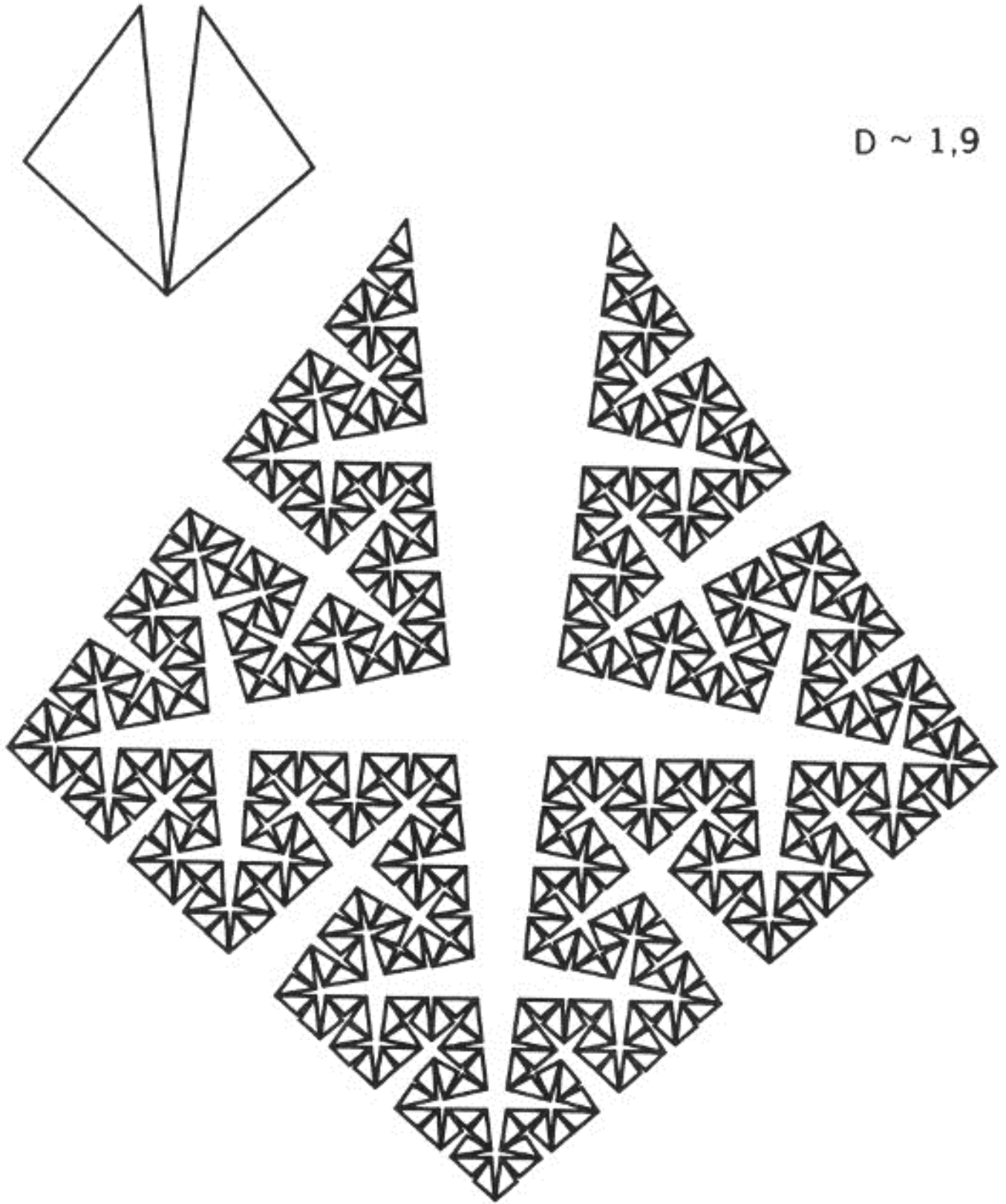


FIGURA 47

Esta figura, una variante de la construcción de von Koch es interpretada como modelo de un corte de pulmón. De hecho, se trata de un modelo mediocre, pero suficiente para aclarar la relación existente entre, por una parte, las conexiones que permiten a este órgano establecer un contacto íntimo entre el aire y la sangre, y por otra, el concepto de objeto fractal.

Como indica el pequeño diagrama arriba a la izquierda, en la página 47, cada pulmón toma la forma de un triángulo isósceles, con el vértice ligeramente obtuso (ángulo de  $90^\circ + \varepsilon$ ), y el contorno de la tráquea corresponde a un ángulo de abertura  $2\varepsilon$ . En cada dirección sale un bronquio de ángulo  $2\varepsilon$ , que divide el pulmón correspondiente en dos lóbulos, el superior y el inferior, ambos delimitados por triángulos isósceles semejantes al contorno inicial, con una razón de proporcionalidad  $1/[2 \cos(\pi/4 - \varepsilon/2)]$ , esto es, algo menos de 0,707. Paralelamente, de cada segmento del contorno externo parte un triángulo de carne que divide el lóbulo correspondiente en dos sublóbulos. Se van añadiendo así, por orden, sub-sub-bronquios y sub-sub-triángulos de carne. Después de algunas iteraciones, el resultado es el que se observa en la figura central. Siguiendo indefinidamente con la misma construcción, se acabaría con la sección de un pulmón ideal, una curva de longitud infinita y de dimensión  $D$  algo menor que 2. Extrapolando a tres dimensiones, se tendría una superficie pulmonar de dimensión algo menor que 3.

Volviendo al plano, la identidad de los lóbulos superior e inferior es muy poco realista. También lo es el hecho de que el modelo prediga la misma área para las secciones del conjunto de los bronquios y del tejido. Además, los bronquios de verdad se bifurcan en sub-bronquios laterales. Estos defectos del modelo son todos ellos fáciles de corregir, gracias a la generalización de la homotecia interna descrita hacia el final del Capítulo 2 e ilustrada por la Figura 50.

En el límite  $\varepsilon = 0$  y  $D = 2$ , la construcción sufre un cambio cualitativo; se obtiene la curva de Peano de la Figura 134, que es una variante de la de la Figura 49.

LÁMINA 49. *La curva original de Peano*

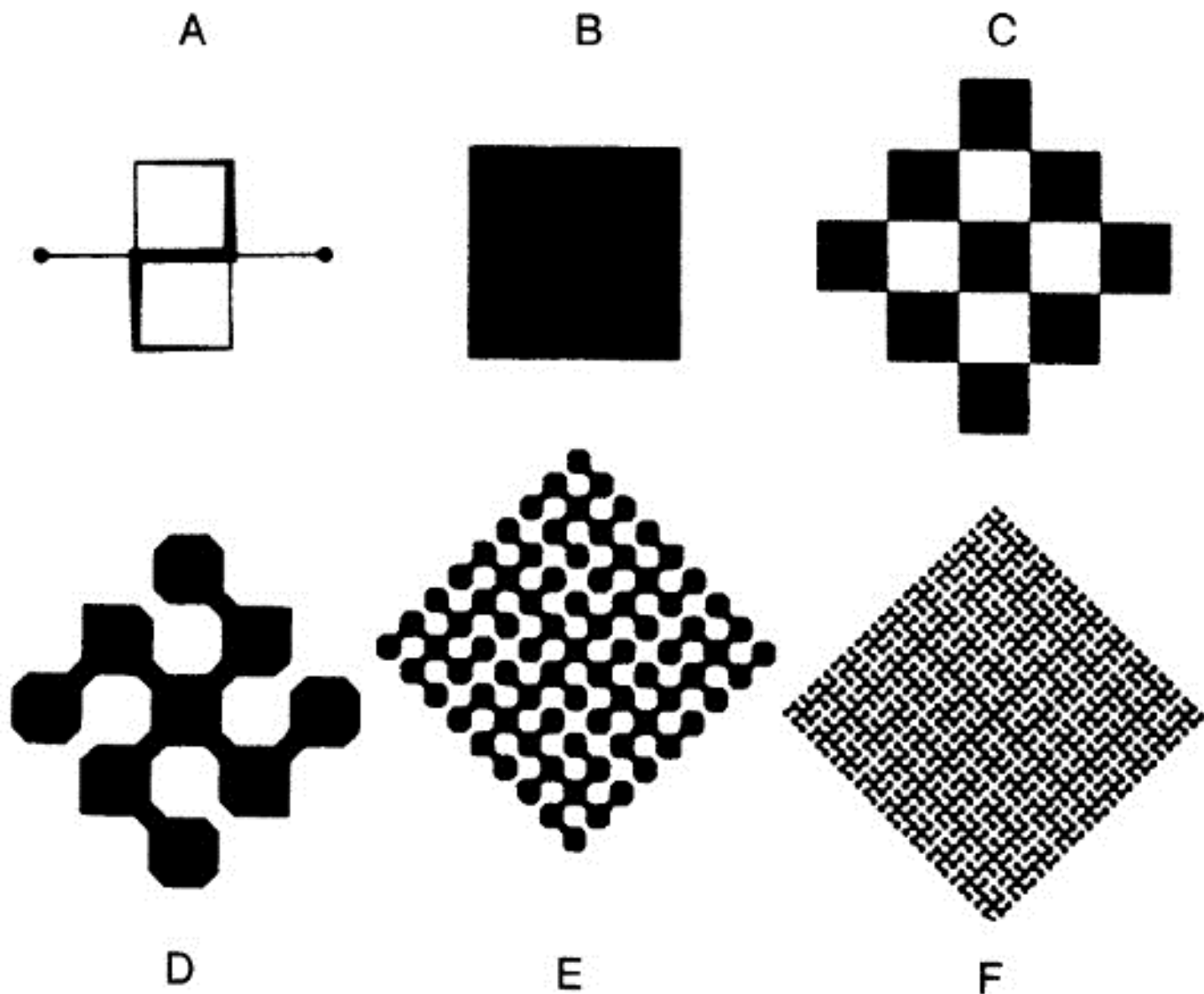


FIGURA 49

La denominación «curva de Peano» se aplica genéricamente a toda una familia de curvas patológicas que, desde 1890 hasta 1925, han jugado un papel decisivo en la elaboración del concepto de dimensión topológica, y que suministran un ejemplo maravilloso de las relaciones entre la dimensión topológica y la dimensión fractal. Para obtener la versión que se ilustra aquí, la curva originalmente debida a Peano se ha girado  $45^\circ$ , de modo que muestra un estrecho parentesco con la curva de von Koch. La primera aproximación es el intervalo de longitud 1. La segunda aproximación es el generador del diagrama A; incluye los tres tercios del intervalo de longitud 1, y añade seis intervalos de longitud  $1/3$  que forman con el tercio central de la primera aproximación una especie de «ocho» en doble cuadrado. Para indicar cómo se recorre el generador el trazo se oscurece progresivamente y luego se aclara. El diagrama B muestra un cuadrado y el C muestra lo que ocurre si el generador se sitúa sobre cada lado del cuadrado. Todo lo que está «a la derecha» de las copias del generador (bordeando el cuadrado en el sentido de las agujas del

reloj) aparece en negro. El diagrama D separa los puntos dobles del diagrama B, haciéndolo así más legible. Las aproximaciones tercera y cuarta (diagramas E y F) sustituyen los tercios centrales de cada segmento de la aproximación anterior por un ocho cuadrado, separando los puntos dobles como en el diagrama D.

En los estados finitos pero avanzados de la construcción, se ve aparecer una forma extraña que podemos llamar «isla de Peano». Su contorno es un cuadrado cuya superficie dobla a la del cuadrado B; las bahías penetran tan profunda y homogéneamente, que toda región termina por distribuirse a partes aproximadamente iguales entre el agua y tierra firme.

La curva de Peano establece una correspondencia continua entre el contorno del cuadrado inicial y el interior del contorno final, pero esta correspondencia no es exacta. La curva, en efecto, tiene un número infinito de puntos dobles, lo cual es inevitable —véase, en el Capítulo 14, la definición de dimensión topológica—. Subrayemos que estos puntos dobles no han podido ser indicados con claridad en el gráfico, dado que habrían hecho imposible seguir la continuidad de la curva; de hecho, por todos lados donde se ven dos puntos muy próximos, éstos se hallan, en realidad confundidos. Otra correspondencia entre una curva y el plano se establece a través del movimiento browniano llano (Figura 57), el cual puede ser considerado como una versión estocástica —yo la llamo «randonizada»— de la curva de Peano. Si se prescinde de contar repetidamente los puntos dobles, la curva de Peano revela tener homotecia interna y una dimensión fractal igual a 2, conforme cubre el plano.

LÁMINA50. *Trampas a evitar en el estudio de la homotecia interna generalizada*

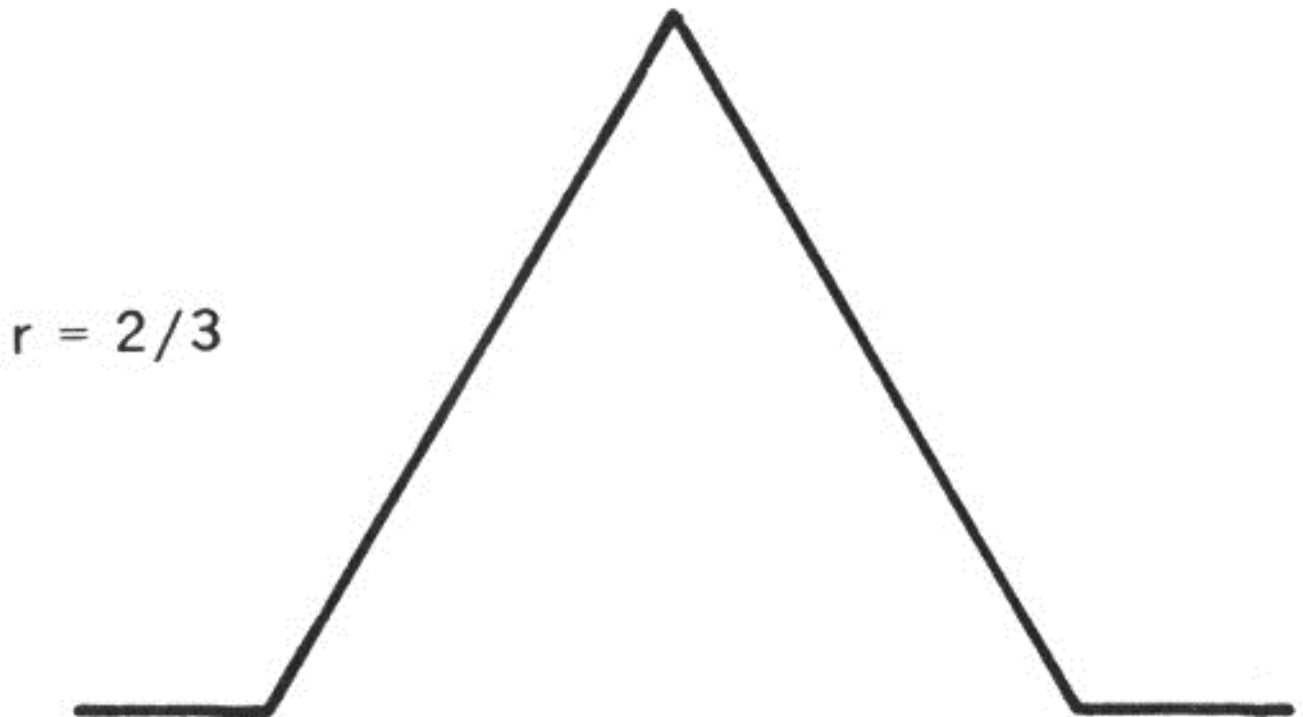


FIGURA 50

Otra manera de generalizar la curva de von Koch tiene como generador la línea

quebrada dibujada aquí. La curva fractal que se obtiene así se puede recubrir con cuatro figuras, que se pueden deducir del total por homotecias de razones  $(1 - r)/2$ ,  $r$  y  $(1 - r)/2$ , respectivamente, con  $0 < r < 1$ . La dimensión formal se define entonces como el número  $D$  que satisface  $\sum r_n^D = 1$ . Cuando  $r$  es suficientemente pequeño, incluido el caso clásico  $r_n = r = 1/3$ , esta dimensión formal se identifica con la de homotecia. Pero esta identificación tiene sus límites. En particular, es necesario que  $D < 2$  en el plano; ahora bien, cuando  $r > r_2 = (1 + \sqrt{6})/5 \sim 0,6898$ , la dimensión formal es superior a 2. La clave de la paradoja estriba en que la homotecia interna sólo tiene sentido estricto si no hay puntos dobles, cosa que no ocurre aquí más que si  $r$  permanece menor que un cierto valor crítico  $r_c$ , que acabamos de establecer que no puede superar  $r_2 = 0,6898$ . Más allá de  $r_2$ , una gran cantidad de puntos son contados muchísimas veces, y de ahí que la  $D$  formal supere la dimensión  $E = 2$  del espacio envolvente. El caso  $r = 1$ , que daría  $D = \infty$ , ha de ser forzosamente excluido, puesto que, en este caso, la construcción de von Koch no converge hacia ningún límite.

## Capítulo 3

### El papel del azar

Este capítulo continúa con la discusión del problema concreto que se ha abordado en el Capítulo 2, e inicia la discusión del segundo término que aparece en el subtítulo del Ensayo.

*Utilización del azar para mejorar el modelo de costa constituido por la curva de von Koch*

Aunque nos haya podido servir para evocar un mapa verdadero, la curva de von Koch tiene dos defectos, que encontramos casi sin variación en los primeros modelos de los otros fenómenos de carácter fractal estudiados en este ensayo: sus partes son idénticas entre sí, y las razones de homotecia interna tienen que formar parte de una escala estricta, a saber:  $(1/3)$ ,  $(1/3)^2$ , etc. Se podría pensar en mejorar el modelo complicando el algoritmo, aunque conservando su carácter totalmente determinista, pero este método no sólo sería fastidioso, sino que además estaría mal inspirado. Está claro, en efecto, que una costa cualquiera ha sido moldeada, con el paso del tiempo, por múltiples influencias, que no es cuestión de seguir al detalle. La situación es aún más complicada que cuando la mecánica trata con sistemas de un número inmenso de moléculas, pues las leyes que rigen el movimiento de éstas a nivel local son conocidas con el máximo detalle, y es su interacción a nivel global la que se conoce mal, mientras que en geomorfología, tanto lo global como lo local son inciertos. Así pues, la solución tiene que ser estadística con mayor motivo que en la mecánica.

Recurrir al azar de esta manera evoca inevitablemente toda clase de inquietudes casi metafísicas, pero no nos vamos a preocupar por ellas. Este ensayo sólo invoca el azar tal como nos lo enseña a manejar el cálculo de probabilidades, porque es el único modelo matemático a disposición de quien pretende entender lo desconocido y lo incontrolable. Afortunadamente, este modelo es a la vez extraordinariamente potente y muy cómodo.

*Azar simplemente invocado y azar plenamente descrito*

Apresurémonos a subrayar que, para describir una variante probabilística del modelo de von Koch, no basta con decir que «sólo hay que barajar las distintas partes, variando sus tamaños». Este argumento se encuentra a menudo, pero pensar e invocar así el azar es más fácil que describir las reglas que permiten realizarlo. Para ser más precisos, la pregunta que se plantea en primer lugar es ésta: sabemos que el azar puede engendrar irregularidad, pero ¿es capaz de engendrar una irregularidad tan grande como la de las costas, cuyo modelo pretendemos construir? Resulta que, no sólo puede, sino que además es muy difícil, en muchos casos, impedir que el azar vaya más allá de los deseos de uno.

En otras palabras, parece como si se tendiera a subestimar el poder del azar para engendrar monstruos. El error se debe, al parecer, al hecho de que el concepto de azar del físico ha sido moldeado por la mecánica cuántica y la termodinámica, dos teorías en cuyo seno el azar interviene a nivel microscópico, donde es esencial, en tanto que a nivel

macroscópico es «benigno». Defino este último término (y hablo de él largamente) en otras publicaciones, y en particular, en un ensayo aún inédito acerca de las *Nuevas formas del azar en las ciencias* (retomado en parte en Mandelbrot & Vallis 1968 y en Mandelbrot 1973). Por el contrario, en el caso de los objetos físicos que nos ocupan, la homotecia interna hace que el azar tenga la misma importancia a cualquier escala, con lo que no tiene ningún sentido hablar de los niveles macroscópico y microscópico. Por consiguiente, el nuevo grado de irregularidad que, en una construcción cierta (sin azar) como la de von Koch, había tenido que ser introducido artificial y patológicamente, puede muy bien, en el caso de una construcción aleatoria, resultar casi inevitable. Esta última observación es debida a dos autores. Fue Jean Perrin quien señaló la analogía cualitativa entre el movimiento browniano de una partícula (Figura 57) y la curva sin derivada de Weierstrass, y fue Norbert Wiener quien transformó esta analogía en una teoría matemática. El precursor había sido Louis Bachelier, que había introducido en 1900 un modelo de la Bolsa de París (episodio expuesto en el Capítulo 15).

*Rastro dejado por el movimiento browniano. Razón por la que no constituye un modelo aceptable de costa*

Definamos pues el movimiento browniano  $P(t)$ , donde  $P$  es un punto del plano, para poder explicar luego por qué su «rastro» no sirve como modelo de costa. El movimiento browniano es esencialmente una sucesión de pequeños desplazamientos mutuamente independientes e isótropos (todas las direcciones son igualmente probables). Bajo el punto de vista de este capítulo, lo más sencillo es caracterizar  $P(t)$  por medio de las aproximaciones obtenidas tomando un compás de abertura fija  $\eta$ : sea cual sea  $\eta$ , los pasos sucesivos de un movimiento browniano tienen direcciones mutuamente independientes e isótropas. La definición usual es menos directa. Para cualquier par de instantes  $t$  y  $t' > t$ , se define el vector desplazamiento como el que va de  $P(t)$  a  $P(t')$ , y se hacen las siguientes hipótesis:

- a) La dirección y longitud de este vector son independientes de la posición inicial  $P(t)$  y de las posiciones correspondientes a los instantes anteriores a  $t$ .
- b) Es un vector isótropo.
- c) Su longitud es tal que la proyección sobre un eje cualquiera obedece la distribución gaussiana, de densidad

$$(2\pi|t' - t|)^{-1/2} \exp(-x^2/2|t' - t|)$$

El «rastro» trazado por el movimiento browniano ha adquirido el derecho a ser considerado en lo sucesivo como uno de los «azares primarios» que describiremos de inmediato. Desafortunadamente, no nos conviene como modelo de costa, por ser, con mucho, demasiado irregular. En particular, tiene una cantidad innumerable de puntos múltiples, incluso en el sentido estrictamente matemático del término, lo que, por supuesto, es inaceptable para una costa. Se trata de una de esas curvas extraordinarias que —como la curva de Peano del Capítulo 2— recubren todo el plano. Se la puede obligar a carecer de bucles, pero no lo haremos hasta el Capítulo 7.

*El concepto de azar primario*

Mientras tanto, creo que será útil —por lo menos para algunos lectores— decir algo

acerca de las razones (profundas, variadas, y en el fondo poco conocidas aún) que hacen que muy a menudo el resultado de operaciones deterministas imite lo aleatorio, descrito por el cálculo de probabilidades.

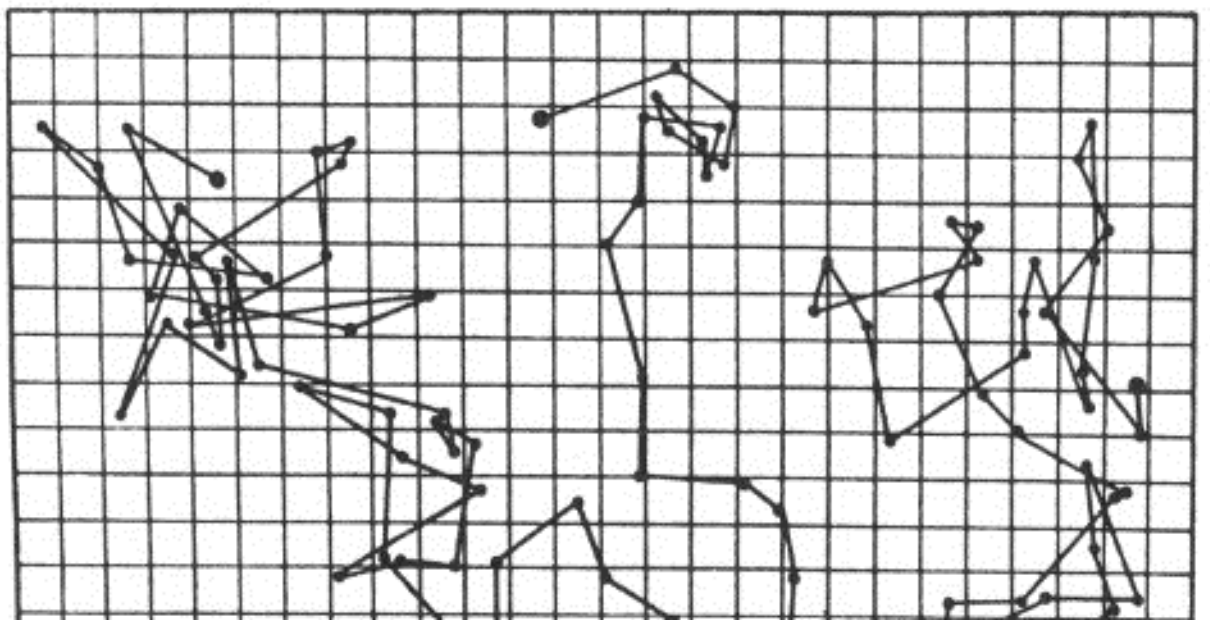
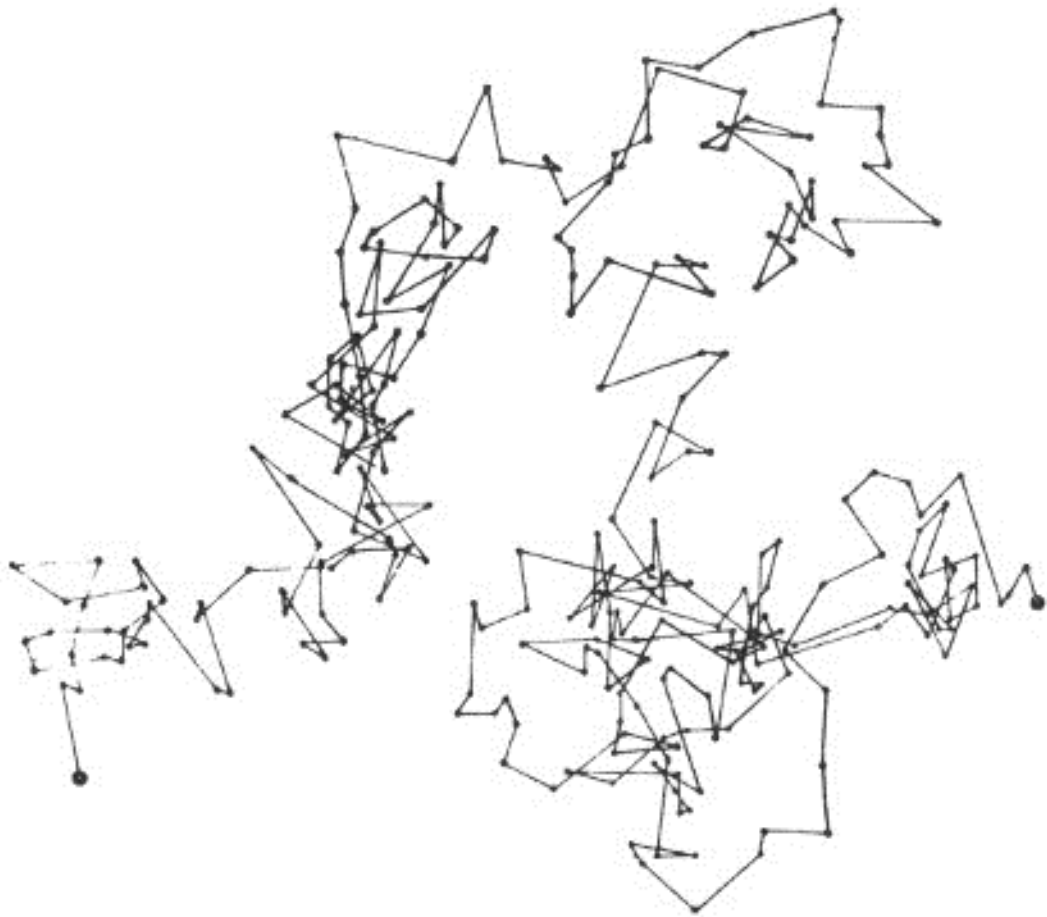
La pregunta se plantea ya de un modo particularmente ejemplar en el contexto de lo pseudo-aleatorio que se simula en un ordenador, de manera deliberada y artificial. Es así como los dibujos supuestamente aleatorios que se pueden encontrar a lo largo de este libro han sido contruidos, casi todos, de una manera perfectamente determinada. El procedimiento combina de modo indirecto los términos de una sucesión suficientemente larga de números, que se tratan como si fueran los resultados de tiradas de un dado de diez caras (de 0 a 9), obtenidas, sin embargo, de modo repetible por un pseudo-dado programado en el ordenador. Se parte de un solo número que se fija arbitrariamente (el número de teléfono del programador, pongamos por caso), que se denomina semilla. La imagen es clara (e imposible de cambiar en lo sucesivo), pero expresa muy mal la intención de alguien que pretenda simular el azar, ya que, si bien cualquier hortelano espera que su cosecha no dependa sólo del suelo, sino sobre todo de lo que siembre, yo espero que la elección de la semilla no tenga ningún efecto notable en mis simulaciones. Por consiguiente, el pseudo-dado de diez caras constituye una especie de base obligatoria de cualquier simulación. Su fundamento es de carácter universal y, para justificarlo, hay que hacer intervenir la interfase entre la fundamentación de números y el cálculo de probabilidades. En cuanto a su aplicación, es muy variable según lo que se ponga en juego, y exige, por parte de los que la estudian, una presencia de espíritu muy distinta; a eso se debe una división muy natural del trabajo entre los especialistas de su fundamento, entre los que no me incluyo, y los de su aplicación, entre los que me cuento.

Todo esto hace comprender mejor cómo el sabio ataca lo pseudo-aleatorio natural. Ahí también se ve, en general, como se distinguen dos estadios que exigen actitudes muy diferentes. Sin embargo, no hay una base universal independiente de la naturaleza del problema y de la manera de abordarlo; uno se las ha de tener, según el caso, con un «azar primario» u otro, entre un gran número de posibilidades. El que es invocado más a menudo sigue siendo el dado, que hay que interpretar aquí como objeto físico idealizado, pero hay muchos otros, como, por ejemplo, puntos cayendo sobre una circunferencia con una distribución de probabilidades uniforme, o estrellas distribuidas en el cielo de modo estadísticamente uniforme (relacionado con la ley de Poisson). Nótese que, cuando no sólo hay una, sino dos o más variables, o incluso una infinidad, como cuando se trata de caracterizar una curva, la hipótesis primaria consiste en suponerlas independientes; tal es el caso del movimiento browniano.

Sea lo que fuere, lo que caracteriza un azar primario es que hace de punto de separación entre dos estadios de una teoría: su base teórica, de la que no diremos casi nada en este libro, y su aplicación, que va a consistir en sustituir unas formas inesperadas del azar por otras formas con las que uno se encuentra ya familiarizado.

LÁMINA57. *Ejemplos de movimiento browniano verdadero, y caos homogéneo*

$D = 2$



### FIGURA 57

Esta figura reproduce algunos ejemplos de movimiento browniano plano (a saber, tres detalles y un trozo grande) según *Les Atomes* de Jean Perrin. Se trata aquí de un proceso físico y no sólo de su modelo matemático: cada segmento une artificialmente las posiciones sucesivas, en el plano focal de un microscopio, de una partícula sometida a choques moleculares. Si se mirara la trayectoria con más detalle, en instantes doblemente próximos, cada salto sería reemplazado por dos saltos de longitud total superior. En el modelo matemático, dicho alargamiento continúa indefinidamente y, en consecuencia, la longitud total de una muestra es infinita. Por otra parte, su superficie es nula. No obstante su dimensión es  $D = 2$ , y (en cierto sentido) recubre el plano de manera uniforme. Éste es uno de los sentidos múltiples que permiten decir que el «caos» representado por el movimiento browniano es homogéneo. (Según la perspectiva que adquiriremos en el Capítulo 6, se trata aquí de un vuelo de Rayleigh en primera aproximación, para el que  $U^2$  sería una variable exponencial).

## Capítulo 4

### Los errores a ráfagas

Este capítulo introduce conjuntos cuya dimensión está comprendida entre 0 y 1 y que están formados por puntos sobre la recta. Para quien tenga que seguir su estudio más allá de donde llegaremos nosotros, estos conjuntos tienen la ventaja de que la geometría de la recta es más sencilla que la del plano o la del espacio, pero tienen en contrapartida dos inconvenientes serios: se trata de polvos tan «tenués» y disueltos que son muy difíciles de dibujar y comparar unas con otras para hacerse una idea intuitiva, aspecto éste que se observará en varias leyendas de figura. Además, el único problema concreto que nos puede servir de soporte es esotérico. El estilo de este capítulo y del siguiente es un poco seco, y el lector puede considerar la posibilidad de saltar inmediatamente al Capítulo 6, que (parafraseando a Henri Poincaré) trata de «problemas que se plantean», más bien que de «problemas que uno se plantea». Sin embargo, este capítulo introduce unos razonamientos que volveremos a tratar más tarde en contextos menos sencillos pero más importantes del plano y del espacio.

#### *La transmisión de los datos*

Una línea de teletransmisión es un objeto físico y cualquier cantidad física está sometida inevitablemente a numerosas fluctuaciones espontáneas, que denominamos «ruidos».

Las fluctuaciones que nos interesan ahora se manifiestan especialmente en las líneas de transmisión de datos entre ordenadores, esto es, de transmisión de señales que sólo pueden tomar dos valores: 1 ó 0. Aun en el caso de que la energía relativa del «1» sea muy fuerte, de vez en cuando sucede que el ruido es lo bastante intenso como para deformar el «1» en «0», o viceversa. Por ello, la distribución de los errores refleja la del ruido, simplificándola al máximo, puesto que una función que toma una gran cantidad de valores posibles (el ruido) es sustituida por una función de dos valores: igual a cero si no hay error, e igual a uno si lo hay. El intervalo entre dos errores se llamará «intermisión».

Lo que hace difícil el problema es que se conoce muy mal cómo la distribución de errores depende de la naturaleza física de la línea de transmisión. Sin embargo, en un caso, que discutiremos, el ruido tiene unas características muy curiosas y muy importantes desde el punto de vista conceptual que aquí nos ocupa, así como desde el punto de vista práctico.

Sin entretenernos en este último aspecto, conviene señalar que la misma raíz de los trabajos descritos en este ensayo está en el estudio de los ruidos en cuestión; me interesé en ellos sin imaginarme su importancia teórica futura, porque planteaban un problema práctico importante que escapaba a los métodos ordinarios de los especialistas.

Analícemos, pues, nuestros errores con una finura progresiva. De entrada, se observa que hay horas en el curso de las cuales no hay ningún error. Así pues, todo intervalo de tiempo flanqueado por dos intermisiones cuya longitud es de una hora o más, tiene el aspecto de una «ráfaga de errores», que consideraremos «de orden cero». A continuación, consideremos dicha ráfaga con más detalle. Encontraremos varias intermisiones de 6 minutos o más, que separan unas «ráfagas de errores de orden 1».

Análogamente, cada una de estas ráfagas contiene varias intermisiones de 36 segundos, que separan unas «ráfagas de orden 2», y así sucesivamente..., basándose cada ráfaga en intermisiones diez veces más cortas que la anterior. Para hacerse una idea de esta jerarquía va bien examinar la Figura 71. Lo más notable de este resultado es que las distribuciones de cada orden de ráfagas se revelan idénticas desde el punto de vista estadístico, en relación al orden inmediatamente superior. Se descubre así un nuevo ejemplo de homotecia interna, y la dimensión fractal no anda lejos, pero, antes de precisarla, vamos a invertir el orden del desarrollo histórico de las ideas —como en el Capítulo 2— y a examinar primero, no el modelo que recomiendo, sino una variante no aleatoria, muy basta pero, por la misma razón, claramente más sencilla, y más importante por sí misma.

*Un modelo basto de las ráfagas de errores: el polvo de Cantor, un conjunto fractal de dimensión comprendida entre 0 y 1*

Acabamos de describir el conjunto de los errores quitándole a la recta intermisiones cada vez más cortas. Esto hace pensar en una famosa construcción matemática cuyo resultado es conocido generalmente como conjunto de Cantor, pero que en este libro recibirá la nueva denominación de «polvo de Cantor». El nombre de Georg Cantor domina la prehistoria de la geometría fractal, pero deliberadamente he tardado en citarlo en este ensayo, pues como es bien sabido provoca repulsión entre los físicos. Trataré de demostrar que esta repulsión no es justificada.

El polvo triádico de Cantor se construye en dos etapas: se interpola primero, y luego (etapa menos conocida, pero esencial) se extrapola.

La interpolación va como sigue. Se parte del intervalo  $[0,1]$  (la dirección de los corchetes indica que los extremos están incluidos) y se le quita el tercio central, designado por  $]1/3, 2/3[$  (no comprende los extremos). A continuación, a cada uno de los tercios que quedan, se le quita su propio tercio central, y así sucesivamente hasta el infinito. El resultado final de esta interpolación es tan tenue, que es difícil de representarla gráficamente sin más ayuda. Afortunadamente, es idéntico a la intersección de la «barra de Cantor» (Figura 72) con su eje, o de la curva de von Koch (un tercio de la costa de la isla dibujada en la parte superior de la Figura 43) con el segmento que forma su «base».

Para extrapolar, se dobla repetidamente el número de réplicas del conjunto interpolado. Primero se coloca una réplica en el segmento  $[2,3]$ , obteniéndose así el conjunto original ampliado en una razón de proporcionalidad 3. Luego se toman dos réplicas en  $[6,7]$  y  $[8,9]$ , obteniéndose así el conjunto original ampliado en un factor 9. Después se disponen cuatro réplicas en los segmentos  $[2 \times 9, 2 \times 9 + 1]$ ,  $[2 \times 9 + 3, 2 \times 9 + 4]$ ,  $[3 \times 9 - 4, 3 \times 9 - 3]$  y  $[3 \times 9 - 2, 3 \times 9 - 1]$ , obteniéndose el conjunto original aumentado 27 veces, y así sucesivamente.

Es fácil ver que el polvo de Cantor tiene una homotecia interna, y que su dimensión es  $D = \log 2 / \log 3 \sim 0,6309$ . Además, variando la «regla de disección», se puede llegar igualmente a dimensiones diferentes, aunque siempre comprendidas entre 0 y 1.

Se puede también verificar que, en la porción  $[0,1]$  del polvo de Cantor, el número de intermisiones de longitud mayor que  $u$  es  $N(u) \propto u^{-D}$ ; más exactamente,  $N(u)$  viene representado por una gráfica escalonada que se cruza constantemente con la gráfica de  $u^{-D}$ . ¡Nueva intervención de la dimensión —y nueva manera de medirla—!

*Número medio de errores en el modelo cantoriano*

Igual que hemos hecho en el caso de una costa, podemos hacernos una idea aproximada de la sucesión de errores que nos preocupa, reiterando el algoritmo cantoriano un número finito de veces. Detenemos la interpolación cuando ésta llega a segmentos de tamaño igual a una pequeña escala interna  $\eta$ , correspondiente a la duración de un símbolo de comunicación, y detenemos la extrapolación a partir del momento que alcanza una cierta escala externa  $\Lambda$ , grande. Finalmente, para obtener una sucesión de longitud superior a  $\Lambda$ , se repite dicha construcción de manera periódica.

A partir de esto, ¿cuál será el número de errores  $M(R)$  de una muestra de longitud  $R$  creciente? Cuando la muestra comienza en el origen, es fácil ver que, si  $R$  se mantiene menor que  $\Lambda$ , el número de errores se dobla cada vez que  $R$  se triplica, con lo que el número total de errores crece como  $M(R) \propto R^D$ , y por consiguiente la densidad media de éstos decrece más o menos como  $R^{D-1}$ .

Detengámonos para observar un tema nuevo y esencial. Se conoce cual es el papel que juega  $D$  en las expresiones que dan la longitud de un segmento, el área de un disco (interior de un círculo) y el volumen de una bola (interior de una esfera). Pues bien, ¡dicho papel acaba de ser generalizado a valores de  $D$  que ya no son necesariamente enteros!

Volvamos a los errores, en el caso de que  $\Lambda$  sea finita (extrapolación detenida): la media del número de errores decrece hasta el valor final no nulo  $\propto \Lambda^{D-1}$ , alcanzado para  $R = \Lambda$ , y a partir de ahí permanece constante. Si  $\Lambda$  es infinito, la media disminuye hasta cero. Finalmente, si los datos sugieren un  $\Lambda$  finito y muy grande, pero no permiten una buena estimación del mismo, el límite inferior de la media es no nulo pero queda mal definido y carece, por ello, de utilidad práctica.

Cuando  $\Lambda$  es finito, se puede también hacer que la muestra empiece en medio de una intermisión. En este caso la media empieza siendo nula y lo sigue siendo durante un rato tanto más largo cuanto más larga sea la intermisión. No obstante, acaba por alcanzar para  $R = \Lambda$ , el mismo valor final  $\propto \Lambda^{D-1}$ . Cuanto mayor sea el valor de  $\Lambda$  menor será la media final, y más largo será el período inicial sin errores; más concretamente, dada una duración finita  $R$ , mayor será la probabilidad de que entre  $t$  y  $t + R$  la muestra esté libre de errores. Cuando  $\Lambda \rightarrow \infty$ , esta última probabilidad tiende a la certeza, planteando así problemas delicados que he resuelto con la introducción del concepto de proceso esporádico, Mandelbrot 1967 b.

*Polvo de Cantor truncado y randomizado, condicionalmente estacionario*

Las insuficiencias del polvo de Cantor desde el punto de vista práctico son evidentes, debido sobre todo a que su regularidad es excesiva, y a que el origen juega un papel privilegiado, que no está justificado en absoluto. Es por tanto necesario sustituir el polvo de Cantor por un pariente que sea irregular por lo aleatorio y que sólo sería superponible a sí mismo desde el punto de vista estadístico; en la terminología probabilista se le denomina estacionario.

Una manera sencilla de conseguir en parte este objetivo ha sido propuesta por Berger & Mandelbrot 1963. Partiendo de una aproximación truncada del polvo de Cantor, cuyas escalas interna y externa satisfagan  $\eta > 0$  y  $\Lambda < \infty$ , basta con randomizar (barajar al azar) el orden de sus intermisiones para hacerlas estadísticamente independientes entre sí. Para hacerlo mejor aún, se supone que las intermisiones tienen una longitud entera mayor o igual que 1 y que la proporción de ellas con longitud mayor o igual a  $u$  es igual a  $u^{-D}$  (en

vez de la función escalonada a la que nos hemos referido más arriba).

En resumen, se parte de las hipótesis de que las intermisiones necesarias son enteros, que son estadísticamente independientes y que la distribución de sus longitudes sigue la ley de «distribución hiperbólica»  $Pr(U \geq u) = u^{-D}$ , que se lee: «la probabilidad de alcanzar o sobrepasar  $u$  es  $u^{-D}$ ». La hipótesis de independencia clasifica los errores como formando un «proceso de renovación», llamado también «proceso recurrente». Si el origen es un «punto de recurrencia», el porvenir y el pasado son estadísticamente independientes, pero no lo son si se ha elegido el origen arbitrariamente. Nos encontraremos a menudo con la distribución hiperbólica, pues está íntimamente relacionada con todo lo que concierne a la homotecia estadística.

Vamos a mostrar cómo los errores así distribuidos pueden, en efecto, ser analizados como si formaran ráfagas jerarquizadas. A falta de un término castellano generalmente aceptado (y para no tomar prestado del inglés la palabra *clustering*, como se hace habitualmente), propongo un neologismo cuyo significado es evidente, y diré que los errores manifiestan un «arracimamiento» muy marcado, cuya intensidad es medida por el exponente  $D$  del que hemos hablado más arriba. Para establecer que hay arracimamiento, elijamos un «umbral»  $u_0$ ; definamos una « $u_0$ -ráfaga» como una secuencia de errores comprendida entre dos intermisiones de longitud mayor que  $u_0$ ; descompongamos toda la secuencia de errores en  $u_0$ -ráfagas sucesivas; distingamos dos tipos de intermisiones: las « $u_0$ -externas» (las que separan nuestras  $u_0$ -ráfagas) y las « $u_0$ -internas», y consideremos las duraciones relativas de estas intermisiones, esto es, sus duraciones divididas por  $u_0$ . Cuando  $D$  es pequeño las duraciones relativas de las intermisiones  $u_0$ -externas tienen una gran probabilidad de ser *muy claramente* mayores que 1 (su cota inferior): por ejemplo, sabiendo que  $U > u_0$ , la probabilidad condicional de que  $U > 5u_0$  es  $5^{-D}$ ; con lo que tiende a 1 cuando  $D$  tiende a 0. Por el contrario, las duraciones relativas de las intermisiones  $u_0$ -internas son, en su mayoría, muy inferiores a 1. Esto es lo que hace que sea razonable la conclusión de que las  $u_0$ -ráfagas están claramente separadas, y lo que justifica precisamente el empleo del término de «ráfaga»; además, el mismo resultado vale para cualquier  $u_0$ , y por consiguiente, las ráfagas están jerarquizadas. Sin embargo, a medida que  $D$  va aumentando, la separación entre ráfagas es cada vez menos acentuada.

Resulta muy notable (Berger & Mandelbrot 1963) que los conjuntos así obtenidos representan sumamente bien nuestros datos empíricos acerca de los errores de transmisión. Además, diversos cálculos referentes al polvo de Cantor se simplifican considerablemente. Empecemos por suponer que  $\Lambda < \infty$  y calculemos el número medio de errores en el intervalo comprendido entre  $t$  y  $t + R$ , siendo  $R$  mucho mayor que la escala interna  $\eta$ , y mucho menor que la escala externa  $\Lambda$ . Conviene proceder en dos etapas. Se supone primero que hay un error en el instante  $t$ , o más generalmente, que entre  $t$  y  $t + R$  el número  $M(R)$  de errores es por lo menos igual a 1. Los valores así calculados no son absolutos sino *condicionales*. Se encuentra que el valor medio condicional de  $M(R)$  es proporcional a  $R^D$ , y por lo tanto independiente de  $\Lambda$ , y que la relación entre  $M(R)$  y su valor medio es independiente de  $R$  y de  $\Lambda$ . Sin embargo, lo esencial es la forma bajo la que se introduce la dimensión en la distribución condicional de  $M(R)$ . En un polvo de Cantor, todo dependía de la posición de  $t$  con respecto al origen. Aquí, por el contrario, toda distribución condicional es invariante con respecto a la posición de  $t$ , de ahí la conclusión de que  $M(R) \propto R^D$  vale para todo  $\Lambda \gg R$  y sigue valiendo cuando  $\Lambda$  se hace infinitamente grande.

Lo que depende fuertemente de  $\Lambda$  es la probabilidad de que el número de errores sea nulo. En particular, para grandes valores de  $\Lambda$ , la probabilidad de que el intervalo

comprendido entre  $t$  y  $t + R$  caiga todo él en una intermisión de longitud enorme, se aproxima a 1, y la probabilidad de observar un error se hace infinitamente pequeña. Pero esto no afecta en nada la probabilidad condicional del número de errores, siendo la condición o bien que haya un error en el preciso instante  $t$ , o bien que haya un error en algún instante entre  $t$  y  $t + R$ . Reanudaremos esta discusión en el capítulo siguiente, a propósito de lo que llamaremos «principio cosmográfico condicional».

*Polvo de Lévy obtenido a partir de una recta a la que se han arrancado «mordiscos» al azar*

Volvamos al conjunto postulado por Berger & Mandelbrot 1963. Sus defectos como modelo de la distribución de errores eran que la representación seguía siendo imperfecta en sus detalles, que la restricción a  $\eta > 0$  era estéticamente molesta, y que la propia construcción era demasiado arbitraria como para que uno se quedara satisfecho con ella. Además, su espíritu se alejaba demasiado del de Cantor. Por ello propuse muy pronto una alternativa que resultó ser mejor en todos los aspectos (véase Mandelbrot 1965c). Consiste en sustituir el polvo de Cantor por una variante aleatoria denominada «polvo de Lévy». La definición clásica resulta de reinterpretar la distribución hiperbólica  $Pr(U \geq u) = u^{-D}$  hasta aquí hemos supuesto que  $u$  es un entero mayor o igual que 1, mientras que Lévy supone que  $u$  es un número real positivo. Como resultado de esto, la «probabilidad» total ya no es igual a 1, ¡sino infinita! A pesar de las apariencias, esta generalización tiene un sentido preciso pero implica diversas dificultades técnicas que conviene evitar. Haremos esto adoptando otra construcción más natural propuesta, por Mandelbrot 1972z.

Para introducirla, es útil describir la construcción de Cantor mediante «mordiscos virtuales». (Puede que este método sea inédito, pues hasta ahora no había tenido ninguna finalidad). Se parte también de  $[0,1]$ , al que se le arranca también el tercio central  $]1/3, 2/3[$ , pero después de esto se arranca los tercios centrales de *cada* tercio de  $[0,1]$ . Como el tercio central de  $[0,1]$  ya ha sido arrancado previamente, arrancarlo por segunda vez no tiene efecto real alguno, pero tales «mordiscos virtuales» resultan ser muy cómodos. Se arranca también el tercio central de *cada* noveno de  $[0,1]$ , de cada veintisieteavo, etc... Hay que señalar aquí que el número de mordiscos de longitud mayor o igual que  $u$  resulta ser igual a  $(1 - D)/u$ , siendo  $D$  una constante determinada por las reglas de disección.

Dicho esto, randonicemos las longitudes y las posiciones de los mordiscos mencionados anteriormente. Los elegiremos independientemente unos de otros, y de tal manera que el número medio de mordiscos de longitud superior a  $u$  sea  $(1 - D)/u$ . Al elegirlos independientes, está permitido que los mordiscos se solapen o que sean virtuales en el sentido definido en el párrafo precedente. Los detalles técnicos importan poco, lo esencial es que el resultado de la construcción depende radicalmente del signo de  $D$ .

Cuando  $D \leq 0$  y nos detenemos en mordiscos de longitud  $\eta > 0$ , es poco probable que quede nada; si queda algo, será sin duda un solo intervalo. Si hacemos después que  $\eta$  tienda a 0, es prácticamente seguro (llegando la probabilidad a ser igual a 1) que los mordiscos no dejan casi ningún punto de la recta real por cubrir.

Por el contrario, cuando  $0 < D < 1$ , los mordiscos dejan indefinidamente sin cubrir un conjunto muy tenue, que resulta ser precisamente un polvo de Lévy de dimensión  $D$ . Este conjunto presenta una homotecia interna estadística uniforme, en el sentido de que la razón  $r$  puede ser elegida sin condicionamientos, contrariamente a lo que ocurría con el conjunto de Cantor, para el que  $r$  había de ser de la forma  $3^{-k}$ , siendo  $k$  un entero.

Es una lástima que (como ya se ha dicho al principio de este capítulo) no haya ningún buen método directo para ilustrar los resultados del último párrafo. Sin embargo, exactamente igual que uno puede imaginarse muy bien un polvo de Cantor de manera indirecta, como intersección de la curva de von Koch con su base, uno puede imaginarse también el polvo de Lévy por un método indirecto, mediante la ciudad de calles aleatorias representadas en la Figura 74. La construcción prolonga cada mordisco de la recta en una dirección del plano escogida al azar. Mientras las «casas» que queden tengan una dimensión  $D > 1$ , su intersección con una recta arbitraria será un polvo de Lévy de dimensión  $D - 1$ . Por el contrario, si  $D < 1$ , es casi seguro que la intersección será vacía.

*P.S.* Los físicos comprenden muy bien la naturaleza de los ruidos clásicos, que dominan la transmisión de señales débiles. El más importante y mejor conocido es el ruido térmico. Pero el problema que nos preocupa aquí concierne a señales tan intensas que los ruidos clásicos son relativamente insignificantes. En consecuencia, los ruidos significativos son no clásicos, difíciles, y seguimos sin comprenderlos bien. Quizá por ello sean apasionantes. El argumento fractal esbozado en este capítulo contribuye a su comprensión.

LÁMINA 71. *Movimiento browniano escalar. Sus ceros y su gráfica*

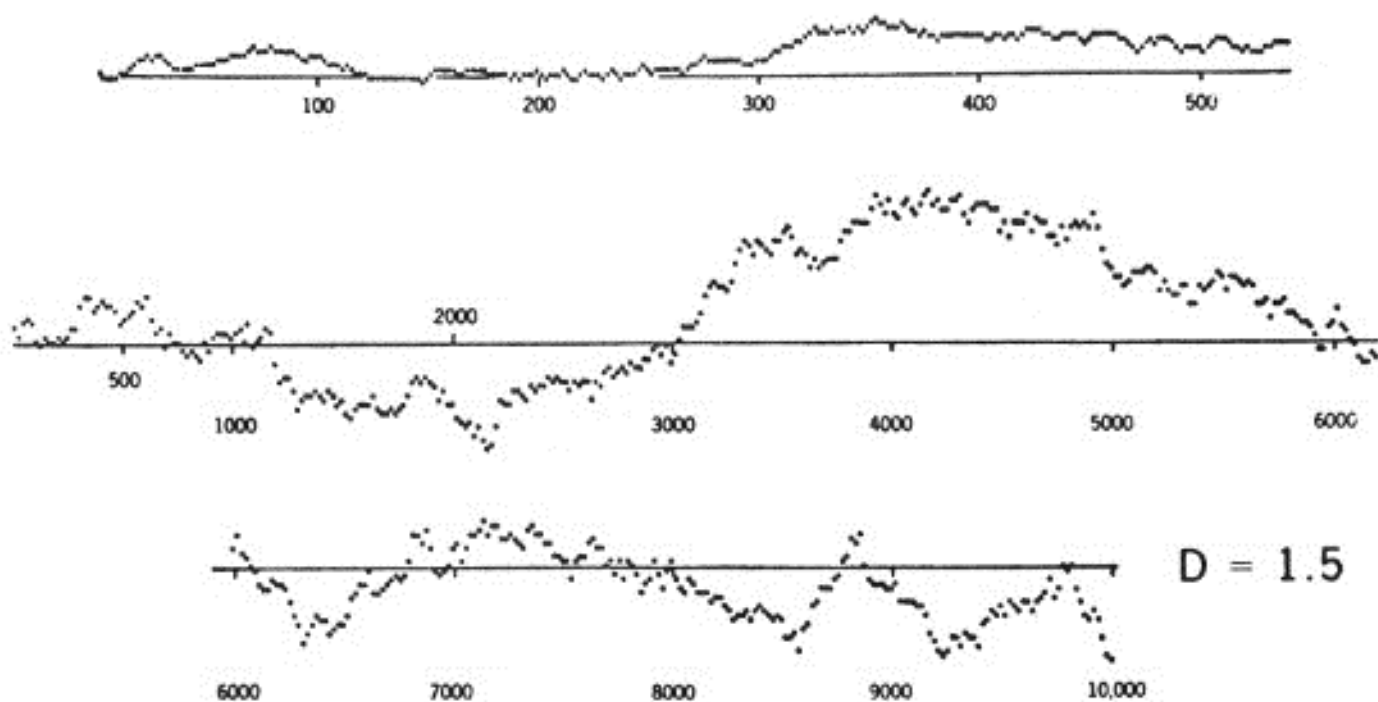


FIGURA 71

La figura de la primera línea representa la secuencia completa de las ganancias acumuladas por «Pedro» jugando contra «Pablo», durante 500 lanzamientos consecutivos de una moneda; se supone que está siempre bien equilibrada (que la cara y la cruz son equiprobables) y que Pedro (resp., Pablo) gana un duro cuando sale cruz (resp., cara). Se sigue de ahí que la ganancia acumulada de Pedro realiza un *vagabundeo* (=paseo aleatorio) sobre la recta; se trata de una aproximación discreta de un movimiento browniano escalar. Las líneas segunda y tercera representan también las ganancias acumuladas de Pedro si la

misma partida llega hasta los 10.000 lanzamientos consecutivos. Para mayor claridad del dibujo se han anotado sólo a intervalos de veinte tiradas. Esta figura procede de un manual célebre (Feller 1950), y se ha reproducido con la autorización de los editores.

El examen repetido de estas curvas ha jugado un papel decisivo en la elaboración de las teorías escritas en este Ensayo. Consideremos, de entrada, sólo los ceros de nuestra función, es decir, aquellos instantes en que las fortunas de Pedro y de Pablo vuelven a su estado inicial. Aunque los intervalos entre estos ceros sean independientes, parece como si sus posiciones estuvieran agrupadas según ráfagas jerarquizadas bien diferenciadas; por ejemplo, cada cero de la primera línea, es reemplazado en la segunda por toda una ráfaga de puntos; si se tratara del movimiento browniano matemático se hubiera podido seguir subdividiendo así las ráfagas indefinidamente. Esta jerarquía se me ocurrió cuando trataba del problema de los errores telefónicos examinados en el Capítulo 4. Se sabía que estos errores están agrupados en ráfagas, pero yo quería verificar si los intervalos entre errores eran independientes o no. Un estudio empírico confirmó esta conjetura, y condujo a los modelos comentados en el texto. Obsérvese que los ceros del movimiento browniano —del que esta Figura es una aproximación— constituyen la variante más simple de un polvo de Cantor aleatorio de dimensión  $D = 0,5$ . Cualquier otra  $D$  que se desee —siempre que esté comprendida entre 0 y 1— puede obtenerse mediante los ceros de otras funciones aleatorias.

Por medio de este modelo, se define la dimensión fractal de una secuencia de errores telefónicos: su valor depende de las características precisas del substrato físico.

Examinemos a continuación, no sólo los ceros de la gráfica de ahí abajo, sino el conjunto de sus valores. En 1963, hice notar que su forma recuerda las secciones verticales del relieve terrestre. Después de varias generalizaciones, esta observación condujo a la sucesión de modelos descrita en el Capítulo 6

Un proceso de Poisson. Los instantes en los que Pedro y Pablo juegan, no están necesariamente distribuidos uniformemente en el tiempo; se los puede elegir al azar independientemente unos de otros, con la misma densidad; en este caso, forman un proceso de Poisson. El resultado no difiere sino imperceptiblemente del *vagabundeo* de más arriba pero presenta ciertas ventajas; en particular, como veremos en el Capítulo 6, su construcción se generaliza al caso multidimensional.

LÁMINA 72. *Barra de Cantor*



$$D = \log_3 2 \sim 0,63$$

FIGURA 72

Esta barra que se pulveriza, corta su eje longitudinal según un polvo de Cantor, conjunto tan tenue que no se puede ilustrar directamente.

LÁMINA 73. *Escalera del diablo*

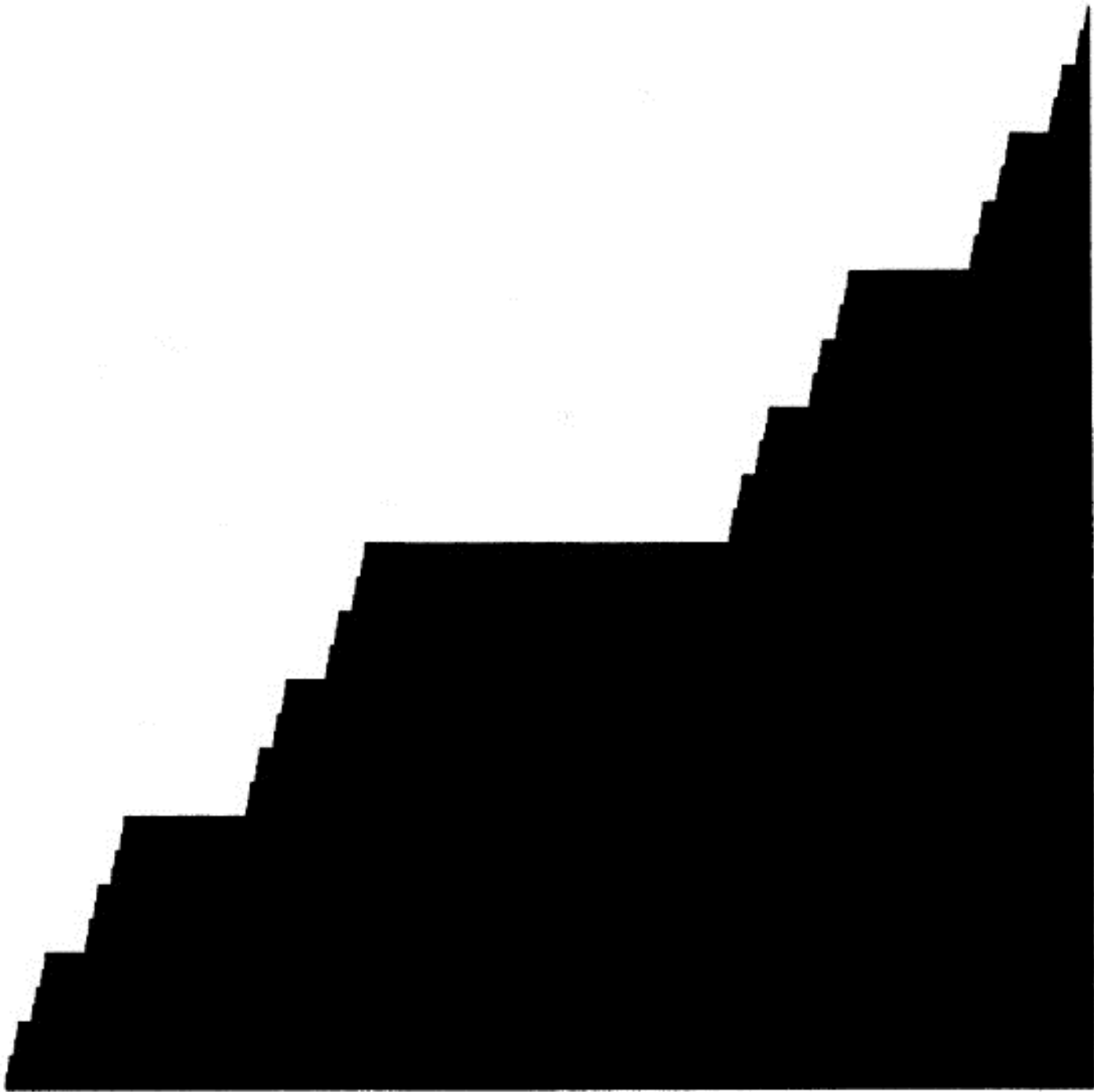
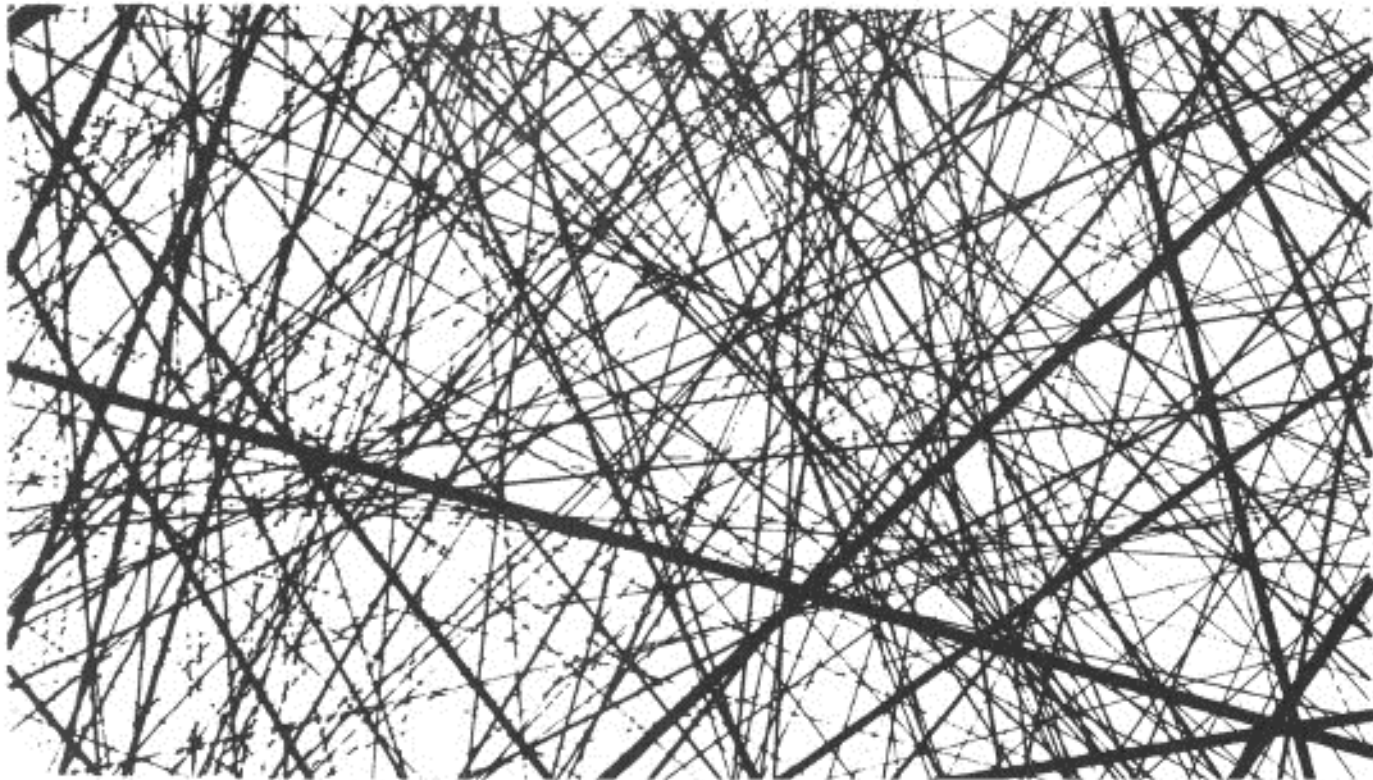


FIGURA 73

El nombre matemático oficial de la función  $y = f(x)$  ilustrada en esta figura es «función de Lebesgue del polvo de Cantor». En cada una de las intermisiones de ésta,  $f(x)$  es constante. En la aplicación práctica discutida en el Capítulo 4,  $\Delta x$  es un intervalo de tiempo, siendo  $\Delta y$  la energía del ruido durante este intervalo. Es cómodo tratar dicha energía como si estuviera distribuida uniformemente según la vertical. La función inversa  $x = f^{-1}(y)$  indica cómo se rompe esta regularidad, se puede decir que se «fractaliza» en una distribución muy irregular.

Una generalización de  $f^{-1}$  en el plano o en el espacio tridimensional está implícito en el estudio de los vuelos de Lévy, ilustrados entre las Figuras 106 a 111. Hay que imaginarse  $k$  como coordenada perpendicular al plano de una de tales figuras y el peldaño  $k$ -ésimo de la escalera paralelamente a un salto del dibujo situado a la altura  $k$ . Si la repartición de la masa galáctica se supone uniforme a lo largo del eje de las  $k$ , la función  $f^{-1}$  la convierte en algo terriblemente no uniforme en el plano o en el espacio.

LÁMINA 74. *Efecto de los mordiscos en forma de banda: la ciudad de calles aleatorias*



$D \sim 1,9$

FIGURA 74

El plano es recorrido por bandas de dirección isótropa, tales que la intersección de la vertical con la banda de clase  $\rho$  tiene longitud  $Q/\rho = (2 - D)/\rho$ . El diagrama corresponde a  $D$  próximo a 2; su intersección con una recta cualquiera es un polvo de Lévy de dimensión  $D - 1$  próxima a 1. Si se sigue indefinidamente el mismo procedimiento la superficie que «queda» para las casas tiene área nula. (¿Habría que construir torres de altura infinita?). Cuando  $Q$  pasa de 2, las «calles» lo ocupan todo y no queda lugar para las «casas».

## Capítulo 5

### Los cráteres de la Luna

La lógica del desarrollo del modelo de los mordiscos —con el que ha terminado el capítulo anterior— nos lleva ahora a los mordiscos del plano en forma de disco. Aunque su interés sea incomparablemente más general, vamos a introducir el tema mediante un comentario rápido, y un tanto seco, acerca del relieve lunar. Así, la Luna nos servirá como etapa en nuestro camino hacia los objetos celestes, que serán estudiados en el capítulo siguiente.

La palabra «cráter» implica un origen volcánico, pero nos será más fácil razonar adoptando los términos de otra teoría, que los atribuye al impacto de meteoritos. Cuanto mayor sea un meteorito, más grande y profundo será el agujero que produzca, pero un impacto grande puede borrar el rastro de otros menores anteriores, y un meteorito pequeño puede «descantillar» el reborde de un cráter grande más antiguo. Se dan, además, otras fuerzas que contribuyen a modificar la superficie de la Luna. A fin de cuentas, por lo que respecta a los orígenes y las áreas de los cráteres, hay que distinguir dos distribuciones distintas: la observada y la subyacente. Admitimos (¡y es una simplificación draconiana!) que los rebordes de los cráteres se borran súbitamente al cabo de un tiempo fijo, sin ninguna relación con su tamaño. Por lo que se refiere a las áreas de los cráteres, Marcus 1964 y Arthur 1954 demuestran que siguen una distribución hiperbólica de exponente  $\gamma$  próximo a 1. Admitimos que ésta es precisamente la distribución subyacente. Finalmente, razonamos en términos del plano, y no de la superficie de la esfera. Esto nos lleva a generalizar a dos dimensiones la construcción de los mordiscos aleatorios, con la que hemos terminado el Capítulo 4. Substituyendo los intervalos por discos, nos las arreglaremos para que todo sea isótropo (invariante por rotaciones del marco de referencia).

Un primer problema consiste en determinar si existen partes de la Luna que nunca sean recubiertas por un cráter. Si la respuesta es afirmativa, habrá que caracterizar la estructura geométrica del conjunto no recubierto. Hemos de señalar que la hipótesis del desgaste brutal de los bordes significa que doblar la «duración»  $V$  de los cráteres antes de desgastarse equivale a doblar el número de cráteres en un área determinada

He aquí las respuestas a las preguntas anteriores. Para empezar, hay dos casos de poco interés matemático y que resultan no ser aplicables a la realidad, ¡lo cual no era evidente a priori! Cuando el exponente  $\gamma$  de la ley de las áreas de los cráteres es menor que 1, entonces —sea cual sea la duración de un cráter— es casi seguro que el resultado del bombardeo meteorítico será que cualquier punto de la superficie de la Luna queda recubierto por lo menos por un cráter. Cuando  $\gamma > 1$ , cualquier cuadrado de superficie lunar tiene una probabilidad no nula de quedar fuera de la superficie recubierta por los cráteres. Dicha superficie tiene pues la apariencia de una loncha de queso Emmenthal: la canción que se enseña a los niños ingleses según la cual la Luna está hecha de queso verde, no se equivocaría de material, aunque sí de color y de origen. Cuanto mayor sea el valor de  $\gamma$ , menos numerosos serán los agujeritos, y más macizo será nuestro queso.

Vayamos ahora al caso interesante. Si  $\gamma = 1$ , y la duración  $V$  de los cráteres supera un cierto umbral  $V_0$ , también es casi seguro que no quedará ningún punto fuera de los cráteres. Si  $V > V_0$  podemos decir simplemente que dicho conjunto no contiene cuadrado

alguno —por pequeño que éste sea— y además, su área (definida como medida de Lebesgue), es igual a cero; finalmente, su dimensión tiende a 0 al aumentar  $V$ .

Cuando  $V$  es más pequeño que  $V_0$ , el conjunto de puntos no cubierto es fractal. Si  $V$  es muy pequeño, esta fractal es de dimensión próxima a 2 y tiene la forma de filamentos infinitamente bifurcados, que separan los agujeros, los cuales son pequeños y no se solapan demasiado. Acaso el aficionado reconozca conmigo una extrapolación ética de la estructura del queso suizo de Appenzell. Cuando  $V$  aumenta y  $D$  disminuye, se pasa progresivamente a un Emmenthal, evanescente también, pero esta vez por causa de grandes agujeros que, a menudo, tienen partes comunes. Este caso incluye, entre otros, muchos pedazos sueltos, rodeados de coronas vacías muy irregulares. Después, para un cierto  $D$  «crítico», la situación cambia cualitativamente: nuestros «filamentos» de queso se descomponen, y el conjunto no cubierto por ningún cráter se convierte en un polvo.

Estos últimos resultados están ilustrados en las Figuras 78 a 81. Superan con mucho en importancia el problema referente a los cráteres de la Luna.

LÁMINAS 78 y 79. *Lonchas de «queso de appenzell fractal», con agujeros redondos aleatorios*

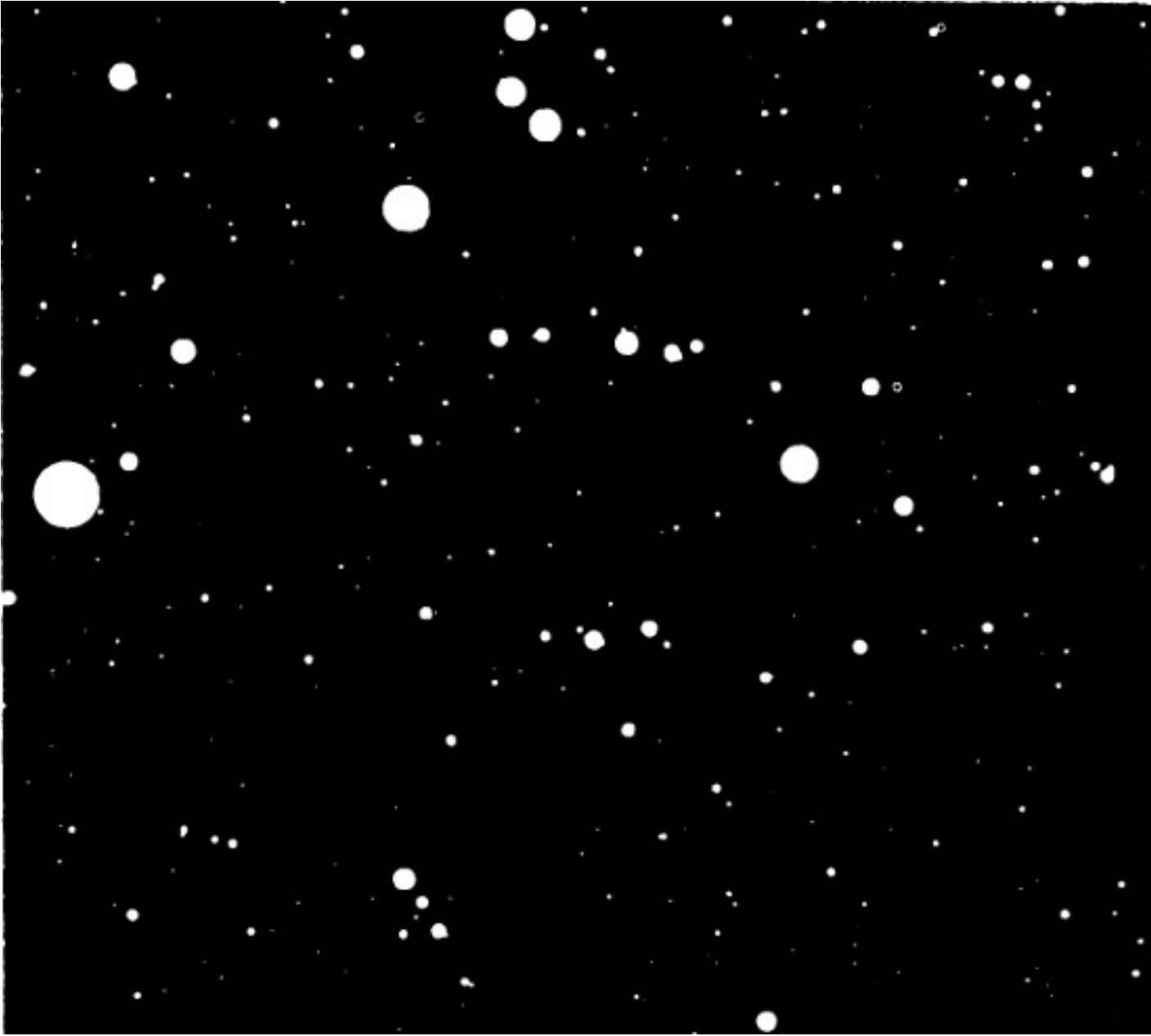


FIGURA 78

Se quitan del plano una serie de mordiscos circulares, marcados en blanco, con los centros distribuidos al azar (distribución de Poisson) y los radios elegidos de manera que se asegure la homotecia interna estadística. Estos radios habrían tenido que ser aleatorios, pero en la práctica han sido elegidos con la forma  $Q/\sqrt{\rho}$ , siendo  $\rho$  el rango de un mordisco en la clasificación según radios decrecientes. Está permitido que un mordisco pequeño interese que seccione a otro mayor. No es sorprendente enterarse de que, si se sigue indefinidamente con el proceso descrito ahí arriba, lo que quede tendrá área nula, pero nuestra intuición no nos dice si realmente va a quedar alguna cosa y, en caso de que así sea, si el resto estará formado por filamentos conexos o por un polvo de puntos.

La respuesta a las preguntas que nos acabamos de plantear depende de  $Q$ ; en particular, la dimensión  $D$  resulta ser igual a  $2 - 2\pi Q^2$ .

Cuando  $Q$  es muy pequeño tenemos, por una parte, que los mordiscos sólo recubren el plano muy lentamente, y por otra, que el resto conserva una interconexión muy fuerte, como se ve en la figura 78, al que le encuentro un parecido con el queso suizo de Appenzell. Esta figura tiene una dimensión fractal de 1,99. En la figura 79, la dimensión fractal es ya  $D = 1,9$ , sin que hayamos cambiado la semilla del generador pseudoaleatorio; se han multiplicado las áreas de los mordiscos precedentes por una constante mayor que 1. El efecto es muy manifiesto: la interconexión del resto ha disminuido de un modo muy notable.

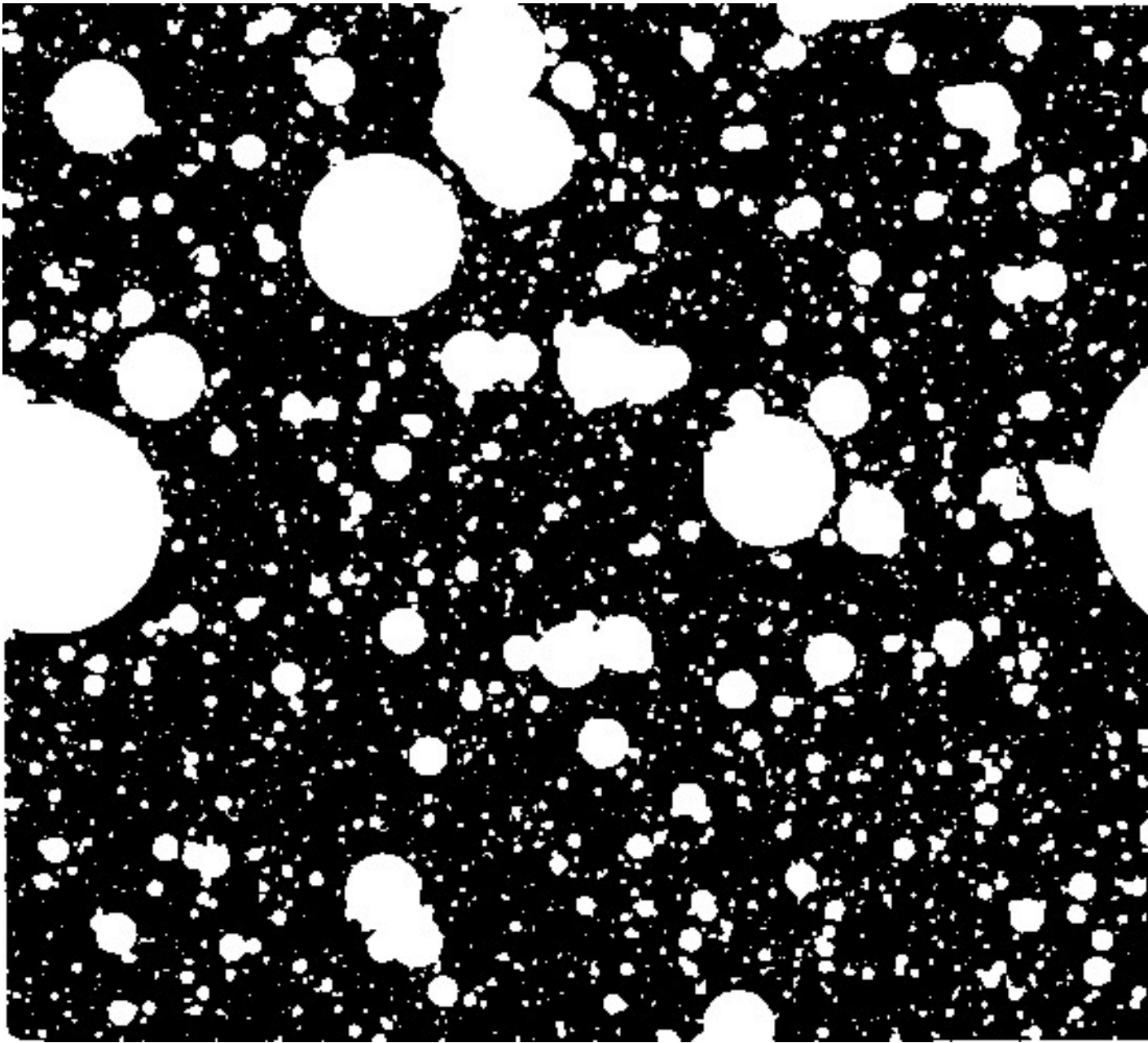


FIGURA 79

LÁMINAS 80 y 81. Lonchas de «queso de emmenthal fractal» con agujeros

*redondos aleatorios*

Volvamos al procedimiento de la figura anterior, y sigamos disminuyendo  $D$ , sin cambiar de semilla y coloreando en negro los mordiscos. Con  $D = 1,75$ , el resultado es el ilustrado por la figura 80 (un Emmenthal un tanto vacío). Igualmente, el caso  $D = 1,5$ , ilustrado por la figura 81, es casi evanescente. Mientras sea  $D > 0$  el «resto» tendrá medida nula pero no será vacío; sin embargo llegará a ser vacío si  $Q$  aumenta más allá de  $1/\sqrt{\pi}$ , caso en el que el  $D$  formal definido por  $2 - 2\pi Q^2$  se hace negativo y deja de ser una dimensión.

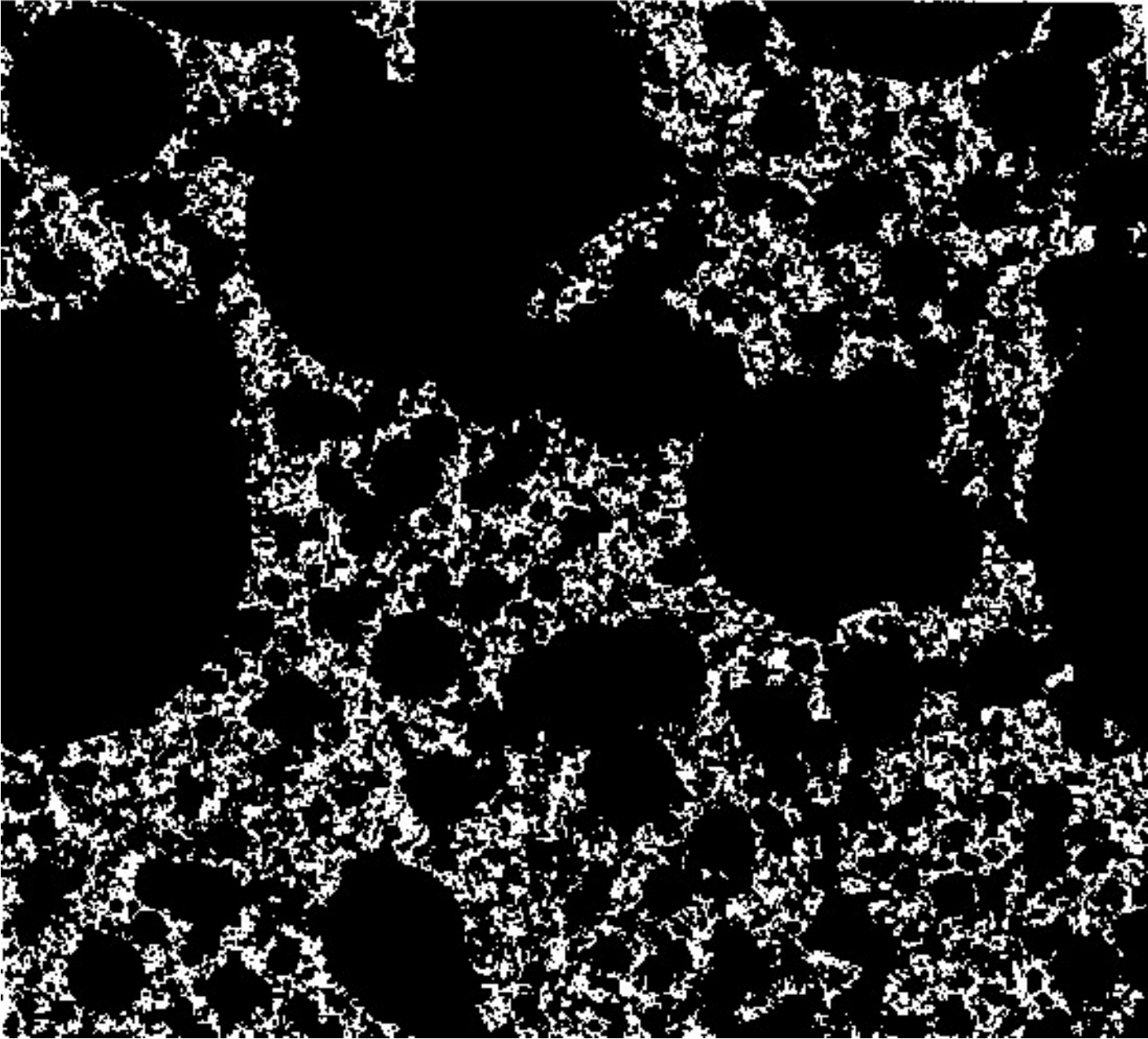


FIGURA 80



FIGURA 81

## Capítulo 6

### La distribución de las galaxias

En este capítulo, volvemos al estudio de un problema que nos es familiar. Me propongo demostrar que la teoría de la formación de las estrellas y las galaxias debida a Hoyle, el modelo descriptivo de Fournier d'Albe, y (lo que es aún más importante) los datos empíricos, sugieren unánimemente que la distribución de las galaxias en el espacio incluye una amplia zona de homotecia interna, en la que la dimensión fractal es próxima a  $D = 1$ . No cabe duda de que esta zona se acaba en las escalas pequeñas, justo antes de llegar a objetos con bordes bien precisos, como los planetas. Pero no es seguro si, a gran escala, esta zona se extiende hasta el infinito, o si, por el contrario se acaba con los cúmulos de galaxias (véase el ejemplo del ovillo de hilo comentado en el Capítulo 1), para seguir con una zona cuya dimensión aparente es  $D = 3$ . Según la respuesta a esta cuestión, que es muy controvertida, la zona en la que  $D < 3$  será más o menos vasta, y el propio concepto de dimensión será más o menos útil.

El problema de la distribución de las estrellas, las galaxias, los cúmulos de galaxias, etc., fascina tanto al aficionado como al especialista, y ha sido objeto de un número considerable de publicaciones, pero ocupa un lugar marginal en relación con el conjunto de la astronomía y la astrofísica. Esto se debe sin duda a la falta de una buena teoría; ningún especialista pretende haber conseguido explicar por qué la distribución de la materia celeste es irregular y jerarquizada, como se observa a simple vista y confirma el telescopio. Esta característica es señalada en todos los textos, pero cuando se pasa a los desarrollos serios, la casi totalidad de los teóricos supone inmediatamente que la materia estelar está distribuida uniformemente. Otra explicación de esta resistencia a tratar de lo irregular es que no se sabía cómo describirlo geoméricamente; todas las tentativas en este sentido habían tenido que reconocer alguna que otra deficiencia. Por esta razón, no quedaba más remedio que pedir a la estadística que decidiera entre la hipótesis de la uniformidad asintótica, muy bien conocida, y una hipótesis contraria, del todo vaga. ¿Hay que sorprenderse de que los resultados de unos tests tan mal preparados hayan sido tan poco concluyentes?

Para salirse de la rutina, ¿no sería útil intentar, una vez más, la descripción sin aguardar a la explicación? ¿No sería útil demostrar con un ejemplo que las propiedades que se desea encontrar en esta distribución son mutuamente compatibles, y todo ello en el seno de una construcción «natural», esto es, en la que no haya que ir metiendo todo aquello que se quiera obtener, y que no sea demasiado *ad hoc*, «hecha a medida»? En este capítulo, mediante la utilización de una generalización del movimiento browniano, vamos a demostrar que una construcción de este tipo es perfectamente posible, que parece fácil (después), y que inevitablemente echa mano de los conceptos de objeto y dimensión fractal. Estudiaremos a qué se parece una distribución sometida a un arracimamiento (siguiendo con el neologismo del Capítulo 4) ilimitado cuando se lo observa radialmente desde la Tierra; el resultado, que no es en absoluto evidente, no puede dejar de influir en la interpretación de los datos experimentales. El Capítulo 9 tratará de los objetos relativamente intermitentes e introducirá la materia interestelar; pero, por el momento, supondremos que el espacio entre las estrellas está vacío. (En publicaciones de carácter más técnico Mandelbrot, 1975u, 1979u, 1982f, muestro lo que este marco propuesto por mí

aporta al estudio estadístico preciso del problema de la intermitencia galáctica).

### *La densidad global de las galaxias*

Empezaremos examinando de cerca el concepto de densidad media global de la materia en el Universo. *A priori*, igual que la longitud de una costa, no parece que la densidad vaya a plantear problema alguno, pero, de hecho, las cosas empeoran enseguida y de una manera muy interesante. Entre los muchos procedimientos para definir y medir esta densidad, el más directo consiste en medir la masa  $M(R)$  contenida en una esfera centrada en la Tierra de radio  $R$ , evaluar después la densidad media definida por  $M(R)/[(4/3)\pi R^3]$ , hacer luego que  $R$  tienda a infinito y definir, finalmente, la densidad media global  $\rho$  como el límite al que forzosamente ha de tender la densidad media.

Desgraciadamente, la convergencia en cuestión deja mucho que desear: a medida que ha ido aumentando la profundidad del Universo alcanzada por los telescopios, la densidad de la materia no ha dejado de disminuir. Incluso ha variado de manera regular, manteniéndose aproximadamente proporcional a  $R^{D-3}$ , donde el exponente  $D$  es positivo y menor que 3, en realidad mucho más pequeño, del orden de magnitud de  $D = 1$ . Por lo tanto, la masa  $M(R)$  aumenta aproximadamente como  $R^D$ , fórmula que nos recuerda a la obtenida en el Capítulo 4 para el número de errores extraños en el lapso de tiempo  $R$ , y que nos da, por lo tanto, un primer indicio de que  $D$  pudiera muy bien ser una dimensión fractal.

La desigualdad  $D < 3$  indica que, a medida que uno se va alejando de la Tierra, los objetos celestes se agrupan jerárquicamente, manifestando así el intenso arracimamiento del que hemos hablado. En los términos elocuentes de Vaucouleurs 1970 (cuya exposición me ha ayudado muchísimo y recomiendo vivamente), «el arracimamiento de las galaxias y, sin lugar a dudas, de todas las formas de la materia, es, según todos los métodos observables, la característica dominante de la estructura del Universo, sin ningún indicio de que haya una aproximación a la uniformidad; la densidad media de la materia decrece continuamente cuando se consideran volúmenes cada vez mayores... y las observaciones no dan ninguna razón para suponer que esta tendencia no continúe a distancias mucho mayores y densidades mucho más bajas».

Si la tesis defendida por Gérard de Vaucouleurs se confirma (no se puede ocultar que había suscitado reservas, pero parece ser cada vez más aceptada), lo más sencillo será suponer que  $D$  es constante. Pero, de todos modos, el Universo en su conjunto se comportaría como el ovillo de hilo comentado en el Capítulo 1: en una zona intermedia, su dimensión sería inferior a 3; a gran escala dicha dimensión sería, según que Vaucouleurs tuviera o no razón, inferior o igual a 3; y en cualquier caso, a muy pequeña escala, desde el punto de vista de la astronomía, se estaría tratando primero con puntos y luego con sólidos de bordes bien delimitados, con lo que  $D$  se haría igual a 0 primero, y luego a 3.

Por el contrario, la idea ingenua de que las galaxias se reparten en el Universo de modo prácticamente uniforme (esta idea se traduciría técnicamente en el hecho de que seguirían la distribución de Poisson) nos ahorraría la zona intermedia en que la dimensión está comprendida entre 0 y 3, dando simplemente las dimensiones 3, 0 y 3 (para escalas decrecientes). Si el modelo fractal con  $0 < D < 3$  sólo se aplica en una zona truncada por sus dos extremos, se podrá decir que, globalmente, el Universo tiene dimensión 3, pero con perturbaciones locales de dimensión inferior a 3 (exactamente igual que la teoría de la relatividad general afirma que, globalmente, el Universo es euclídeo, pero la presencia de materia lo hace localmente riemanniano).

## Sumario del Capítulo 6

Sea cual sea el valor de las sugerencias hechas hace un instante, conviene preguntarse bajo qué forma matemática —evitando contradecir la física, pero sin esperar que, por el momento, ésta nos pueda proporcionar alguna ayuda— se puede formalizar la idea de que la densidad aproximada de materia tienda hacia cero, anulándose la densidad global. La primera construcción que demuestra la compatibilidad de estas condiciones parece haber sido dada en 1907 por Edmund Edward Fournier d'Albe, un autor de trabajos de «ciencia ficción» disfrazados de ciencia, algunos de los cuales están a la espera de convertirse efectivamente en trabajos científicos. Presentaremos su modelo a partir del original, pues uno no puede fiarse de ninguna de las exposiciones (sarcásticas e incompletas) que se han hecho de él. Su extraña obra, Fournier 1907, sólo ha sobrevivido porque tuvo la suerte de llamar la atención de un astrónomo ya establecido, C.V. L. Charlier, en cuyas manos dio lugar a un modelo más general, pero en realidad menos útil, que describiremos dentro de poco. El principio de este modelo fue discutido por Borel 1922, pero luego cayó en el olvido, para ser reinventado de nuevo por Lévy 1930 y —lo que es más importante aún— por Hoyle 1953. Al igual que Fournier y Charlier, Paul Lévy intentaba evitar la paradoja del *cielo en llamas*, conocida como «paradoja de Olbers», que apasiona al aficionado y que vamos a tratar. Más tarde, Hoyle desarrolló su modelo de la génesis de las galaxias, que también analizaremos.

Considero conveniente centrar la exposición siguiente en el modelo de Fournier-Charlier, pero no se puede pretender mantenerlo hasta el final, pues es totalmente inverosímil, exactamente igual y por las mismas razones que lo era el conjunto de Cantor para los errores telefónicos: es excesivamente regular, y el origen terrestre desempeña un papel privilegiado en su construcción, cosa que resulta inaceptable, porque es contraria al principio cosmográfico —que también discutiremos.

Este último principio plantea un problema muy serio, pues no sólo es incompatible con el modelo de Fournier-Charlier-Hoyle, sino que también lo es con la idea de que la densidad media en una esfera de radio  $R$  tiende hacia 0 cuando  $R$  tiende a infinito. He demostrado, sin embargo, que dicha incompatibilidad matemática puede —por decirlo así— ser «exorcizada». Así pues, inmediatamente después de haber descrito el modelo de Fournier, afirmaré que el principio cosmográfico va más allá de lo razonable y de lo que sería de desear, y que debe ser modificado de un modo no por natural menos radical. Recomendaré que se adopte bajo una nueva forma más débil, que calificaré de condicional, postulando que dicho principio sólo vale para los observadores «verdaderos». En apariencia, esta nueva forma débil será sin duda inofensiva, y no cabe duda de que la mayoría de los astrónomos, no sólo la encontrarán aceptable, sino que se preguntarán qué es lo que puede aportar de nuevo; la habrían estudiado desde mucho tiempo atrás si les hubiera despertado el menor interés. Veremos cómo el principio cosmográfico condicional no implica ninguna hipótesis respecto a la densidad global. Para demostrar que permite que la densidad media se comporte como  $R^{D-3}$  alrededor de cualquier observador verdadero, describiré una construcción explícita que, en cierto aspecto técnico, equivale a la sustitución injustificada de un problema de  $N$  cuerpos, que es irresoluble, por una combinación de problemas de dos cuerpos, que se puede resolver fácilmente; este procedimiento no pretende tener ninguna realidad cosmográfica, pero resuelve la paradoja que nos interesa. Por el camino, encontraremos muchas razones para interpretar  $D$  como

una dimensión fractal.

*El Universo estrictamente jerárquico de Fournier*

Consideremos 5 puntos, como en la Figura 104, dispuestos en los cuatro vértices de un cuadrado y en su centro; añadámosles dos puntos más, situados respectivamente por encima y por debajo de nuestra hoja de papel, según la vertical del centro, y a la misma distancia de éste que los cuatro vértices del cuadrado inicial: los 7 puntos así obtenidos forman un octaedro regular centrado. Si se interpreta cada punto como un objeto celeste de base, o también como un «racimo de orden 0», el octaedro será considerado como un «racimo de orden 1». Se continúa la construcción del modo siguiente: un «racimo de orden 2» se obtiene aumentando un racimo de orden 1 en un factor  $1/r = 7$ , y tomando cada uno de los 7 puntos así obtenidos como centro de una réplica del racimo de orden 1. Análogamente, un «racimo de orden 3» se obtiene aumentando uno de orden 2 en un factor  $1/r = 7$ , y tomando cada uno de los 49 puntos así obtenidos como centro de una réplica del racimo de orden 1. Así pues, para pasar de un orden cualquiera al siguiente, se aumenta el número de puntos, y también el radio, en un factor  $1/r = 7$ . Por consiguiente, si cada punto tiene la misma masa, que tomaremos como unidad, la función que da la masa  $M(R)$  contenida en una esfera de radio  $R$  oscila alrededor de la función representada por la recta  $M(R) = R$ . La densidad media en la esfera de radio  $R$  es aproximadamente proporcional a  $R^{-2}$ , la densidad media global se anula, y la dimensión, definida mediante  $M(R) \propto R^{D-3}$ , es igual a 1. Partiendo de los racimos de orden 0 se puede también interpolar indefinidamente, por etapas sucesivas; la primera etapa sustituye cada uno de ellos por una imagen del racimo de orden 1, reducida en un factor  $1/7$ , y así sucesivamente.

Se observa que las intersecciones del resultado con cada uno de los tres ejes de coordenadas, así como sus proyecciones sobre estos ejes, son polvos de Cantor, consistiendo cada etapa de su construcción en dividir  $[0,1]$  en 7 partes iguales y después arrancar la segunda, tercera, quinta y sexta.

Este Universo infinitamente interpolado y extrapolado tiene homotecia interna, y se le puede definir una dimensión de homotecia, a saber  $D = \log 7 / \log 7 = 1$ . E incidentalmente, observamos este nuevo elemento: un objeto espacial puede tener dimensión 1 sin ser una recta ni una curva rectificable, e incluso sin ser de una sola pieza; así pues, una misma dimensión de homotecia es compatible con valores distintos de la dimensión topológica (concepto descrito en el Capítulo 14). Esta posibilidad nos enseña un poco más acerca de la dimensión de homotecia: puede tomar valores enteros «anormales», es decir, superiores a la dimensión topológica. (¡Obsérvese que el antiguo término «dimensión fraccionaria» obligaba a decir que algunos objetos tenían una «dimensión fraccionaria igual a 1 ó a 2»!).

Como veremos más adelante, Fournier y Hoyle avanzaron distintas razones físicas para justificar este  $D = 1$ , pero hay que señalar inmediatamente que este valor no es en absoluto inevitable desde el punto de vista geométrico. Aún conservando la construcción a base de octaedros y el valor  $N = 7$ , se puede dar a  $1/r$  un valor distinto de 7, obteniendo así  $M(R) \propto R^D$  con  $D = \log 7 / \log (1/r)$ . Para  $1/r$  es aceptable cualquier valor comprendido entre 3 e infinito, y por lo tanto,  $D$  puede tomar cualquier valor entre 0 y  $\log 7 / \log 3 \sim 1,7712$ . Y aún más: la elección de  $N$  es discutible. Fournier dice que tomó  $N = 7$  sólo para hacer posible un dibujo legible, siendo el «verdadero» valor  $N = 10^{22}$  (no explica el por qué); por el contrario, Hoyle toma  $N = 5$ . Sea como sea, dando un  $D$  que satisfaga  $D < 3$ , es fácil

construir variantes del modelo de Fournier cuya dimensión tome este valor.

(Señalemos, sin detenernos en ello, que la estructura infinitamente jerarquizada del Universo de Fournier sólo aparece plenamente si se lo examina desde un punto infinitamente lejano, empleando un instrumento que permita al mismo tiempo ver hasta el infinito y percibir la distancia. Para un observador que forme parte del Universo, y cuyos instrumentos tengan una potencia limitada, permitiéndole ver sólo hasta una profundidad  $R < \infty$ , el Universo de Fournier tendrá una apariencia completamente diferente).

*El Universo de Charlier, con dimensión efectiva indeterminada en un intervalo.*

Los defectos del Universo de Fournier son innumerables; entre ellos se cuenta el hecho de que es demasiado regular. Éste es un aspecto que corrige Charlier 1908-1922 dejando que  $N$  y  $r$  varíen de un nivel de jerarquía al siguiente, tomando los valores  $N_m$  y  $r_m$ . El objeto que se obtiene así, claro está, no tiene ni homotecia interna ni una verdadera dimensión.

Más concretamente, la cantidad  $\log N_m / \log(1/r_m)$ , que corresponde al nivel  $m$ , puede depender de  $m$ . Suponer que se mantiene entre dos cotas que denotaremos por  $D_{\min}$  y  $D_{\max}$  introduce un tema más: la dimensión física efectiva puede muy bien no tener un valor único y bien determinado, sino solamente un par de cotas (una superior y otra inferior); este tema no puede, sin embargo, ser tocado aquí.

Sea lo que fuere, la condición  $D_{\max} < 2$  (satisfecha por el modelo de Fournier al tomar  $D = 1$ ) evita la paradoja de Olbers, acerca de la que hablaremos dentro de un instante. Observemos de pasada que Charlier evita precisar la relación geométrica existente entre los objetos de un mismo nivel. Invoca así lo que el Capítulo 3 califica sarcásticamente de azar-invocación, o azar-deseo. No sabríamos conformarnos con esto.

Parece ser que Kepler fue el primero en darse cuenta de que la hipótesis de uniformidad en la distribución de los cuerpos celestes es insostenible. Si así fuera, el cielo nocturno no sería negro; tanto de día como de noche, todo el cielo tendría la misma luminosidad que el disco solar, es decir, tendría uniformemente el color del fuego. Esta inferencia se conoce normalmente como «paradoja de Olbers», por referencia a Olbers 1823; para una discusión histórica puede uno dirigirse a las referencias siguientes: Munitz 1957, North 1965 o Jaki 1969. Hemos dicho que la paradoja desaparecería si uno pudiera convencerse de que los cuerpos celestes satisfacen  $M(R) \propto R^D$  con  $D < 2$ . El objetivo primero de Fournier y Charlier había sido construir un Universo en el que  $M(R)$  tuviera efectivamente esta forma.

El razonamiento de Olbers es sencillo a más no poder: la luminosidad de una estrella, situada a una distancia  $R$  del observador, disminuye en la proporción  $1/R^2$ , pero su superficie aparente es también proporcional a  $1/R^2$ , con lo que la densidad de luminosidad aparente será la misma para todas las estrellas. Además, si el Universo es uniforme, casi cualquier dirección trazada en el cielo intersectará el disco aparente de alguna estrella, con lo que la densidad de luminosidad aparente será la misma para todo el cielo. Por el contrario, si  $M(R) \propto R^D$  con  $D$  inferior al umbral  $D = 2$ , una proporción no nula de las direcciones se pierde en el infinito sin encontrar nada. Ésa es una razón *suficiente* para que el fondo del cielo nocturno sea negro. Hay que decir inmediatamente, no obstante, que no se trata de una razón *necesaria*. Hay muchas otras explicaciones, cuyo estudio cae fuera de las intenciones de este libro, pero de todas ellas podemos decir que es lamentable que hayan servido para desviar la atención del estudio del arracimamiento estelar o galáctico.

Hemos de señalar también que, cuando la zona en la que  $D < 3$  va seguida, a una distancia grande pero finita, de otra zona en la que  $D = 3$ , el fondo del cielo no será negro, sino que estará ligeramente iluminado.

Volvamos a Fournier. Vemos que es más preciso que Charlier, en tanto que se impone un cierto valor de  $D$ , a saber  $D = 1$ , valor que le basta y le sobra para evitar la paradoja de Olbers. Lo justifica (pág. 103 de su libro) con un razonamiento muy notable —¡y más aún en 1907 que en 1975!—<sup>[1]</sup> que reza como sigue. Utilizando sin demasiados escrúpulos una fórmula que en principio sólo es aplicable para objetos con simetría esférica, supone que en la superficie de cualquier universo visible (de orden arbitrario) de masa  $M$  y de radio  $R$ , el potencial gravitatorio toma la forma  $GM$  (siendo  $G$  la constante de la gravitación). Una estrella que cayera sobre este universo tendría, en el momento del impacto, una velocidad de  $(2GM/R)^{1/2}$ . Ahora bien, afirma Fournier, la observación muestra que dichas velocidades están acotadas. (¡Uno se pregunta en qué basaba esta afirmación en 1907; en 1975 su enunciado suena como algo muy nuevo!). Si se quiere que, para objetos celestes de orden elevado, esta velocidad no tienda ni a cero ni a infinito, es necesario que la masa  $M$  crezca como  $R$ , y no (como en el caso de una distribución de Poisson) como el volumen  $(4/3)\pi R^3$ .

*Cascada de Hoyle. Justificación de  $D = 1$  por el criterio de estabilidad de Jeans*

Definiremos un Universo pentádico de Fournier finito, como el que se obtendría si la construcción de Fournier se basara en  $N = 5$  en vez de  $N = 7$ , y no se extrapolara hasta lo infinitamente grande ni se interpolara hasta lo infinitamente pequeño. Vamos a demostrar ahora que tanto el carácter jerárquico de un tal Universo, en la forma de «azar-deseo» debida a Charlier, como el hecho de que la dimensión tenga que ser igual a 1, se pueden deducir de la hipótesis de que las galaxias y las estrellas se han formado por una cascada de fragmentaciones a partir de una masa gaseosa uniforme.

El argumento, debido a Hoyle 1953, es controvertido, pero tiene en cuenta una cierta realidad física. En particular, asocia el hecho de que  $D = 1$  al criterio de equilibrio de las masas gaseosas debido a Jeans. Imaginemos una nube gaseosa de temperatura  $T$  y de masa  $M$  distribuida con densidad uniforme en un borde esférico de radio  $R$ . Hoyle postula que  $M/R$  toma efectivamente este valor crítico, que la contracción se detiene al formarse una nube de radio  $R/5^{2/3}$ , después de lo cual la nube se subdivide en 5 nubes iguales, de masa  $M_1 = M/5$  y de radio  $R_1 = (R/5^{2/3})/5^{1/3} = R/5$ . Al terminarse (adrede) la etapa igual que comenzó, en la inestabilidad, irá seguida de una segunda etapa de contracción y subdivisión. Hoyle no elige  $N = 5$  para simplificar la ilustración si no por razones físicas y bien precisas (en las que no nos podemos detener). Jeans demuestra que en el caso crítico en que  $M/R = JkRT/G$  (siendo  $J$  un cierto factor numérico,  $k$  la constante de Boltzmann y  $G$  la constante de la gravitación), dicha nube es inestable, e inevitablemente se contraerá y subdividirá.

Se puede demostrar además que la duración de la contracción de orden  $m$  es  $5^{-m}$  veces menor que la de la primera; con lo que, aunque el proceso continuara hasta lo infinitamente pequeño, su duración total seguiría siendo finita, superando como mucho en una cuarta parte la duración de la primera etapa.

Se llega así a las siguientes conclusiones. Primero, que Hoyle encuentra otra vez el principio cantoriano que estaba ya subyacente en Fournier. Segundo, que Hoyle da razones físicas para tomar  $N = 5$ . Tercero, que el criterio de estabilidad de Jeans proporciona un

segundo camino para determinar la dimensión  $D$ , y, cosa interesante, da exactamente el mismo resultado final: la dimensión ha de ser igual a 1. Por otra parte, los argumentos de Hoyle y Fournier no son, sin lugar a dudas, sino dos aspectos distintos de una misma idea. En efecto, se observa que en el borde de la nube inestable de Jeans,  $GM/R$  es igual a la vez a  $V^2/2$  (Fournier) y a  $JkT$  (Jeans). Con lo que  $V^2/2 = JkT$ , lo cual indica que la velocidad de caída de un objeto macroscópico es proporcional a la velocidad media de las moléculas que da lugar a  $T$ .

Uno de los innumerables defectos del modelo de Fournier es que asigna al origen un papel sumamente privilegiado. Es un modelo resueltamente geocéntrico y por ende antropocéntrico («a la antigua»); es contrario al «principio cosmológico» que postula que nuestro tiempo y nuestra posición sobre la Tierra no tienen nada de particularmente especial ni nada de central, sino que las leyes de la naturaleza han de ser las mismas en cualquier lugar y en cualquier instante. Esta afirmación es discutida por Bondi 1952. Más concretamente, lo que aquí nos interesa es la aplicación de este principio general a la distribución de la materia, y además no nos ocuparemos de la teoría ( $\lambda\omicron\gamma\omicron\sigma$ ), sino solamente de la descripción ( $\gamma\rho\alpha\phi\eta$ ). Distinguiremos pues, con el nombre de «principio cosmográfico fuerte», la afirmación de que la materia sigue las mismas leyes estadísticas para cualquier sistema de referencia (origen y ejes) desde el que se examine.

La idea es muy tentadora, pero difícil de conciliar con unas distribuciones que distan mucho de ser uniformes. Ya hemos dicho algo acerca de esto en el contexto de los errores de transmisión estudiados en el Capítulo 4. La naturaleza de las dificultades que se encuentran cambian según sea el valor de la densidad global de materia  $\rho$  en el Universo: si es nulo, uno se enfrenta con una incompatibilidad de principio, mientras que si  $\rho$  es pequeño pero no nulo, las dificultades sólo son de tipo estético y de comodidad. Pero, sea cual sea el valor de  $\rho$ , parece importante disponer de un enunciado que esté de acuerdo con una visión del mundo que tenga en cuenta los objetos fractales. Para ello, creo que será útil separar lo que habitualmente se toma como principio cosmográfico, en dos partes, cada una de las cuales será objeto de una sección.

#### *Principio cosmográfico condicional*

Refiramos el Universo a un sistema de referencia que cumpla la condición de que su origen tiene también masa.

POSTULADO: la distribución condicionada de la masa es idéntica para todos los sistemas de referencia; en particular, la masa  $M(R)$  contenida en una esfera de radio  $R$ , es una variable aleatoria independiente del sistema de referencia.

#### *Postulado adicional*

Si es necesario, se podrá postular también que los límites, para  $R \rightarrow \infty$ , de  $R^{-3}M(R)$  y de  $R^{-3} \dot{M}(R)$  son casi seguramente iguales, y que además son positivos y finitos.

#### *Consecuencias de estos principios*

Consideremos las leyes de distribución de la materia en un sistema de referencia arbitrario y en otro condicionado por el hecho de que su origen sea material. Si vale el postulado adicional, esta última distribución se deduce de la primera por las reglas usuales

del cálculo de probabilidades condicionadas, y la primera se deduce de la segunda tomando la media con respecto a los orígenes distribuidos uniformemente en todo el espacio.

(Hay un punto delicado, digno de ser subrayado entre paréntesis: cuando se integra sobre todo el espacio la distribución uniforme de los orígenes, da una masa infinita y, en consecuencia, no es evidente que vaya a ser posible renormalizar la distribución no condicionada de modo que su suma sea uno. Para que esto pueda hacerse es necesario y suficiente que la densidad media global sea positiva).

Supongamos ahora que el postulado adicional sea falso, siendo nulo el  $\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-3} M(R)$ . En este caso, la distribución no condicionada de probabilidad simplemente nos dice que, si se elige libremente una esfera de radio  $R$  finito, es casi seguro que estará vacía; cosa que, por muy cierta que fuera, carecería completamente de interés y sería insuficiente a efectos prácticos. Cuando todos los casos interesantes tienen, como aquí, una probabilidad nula, la física matemática ha de encontrar un método que distinga entre ellos. Esto es precisamente lo que hace la distribución condicionada de probabilidad, y es lo que justifica el énfasis que propongo que se continúe dando al principio cosmográfico condicional.

Subdividir en dos partes el principio universal tiene la ventaja filosófica suplementaria de concordar con las maneras de la física contemporánea, separando lo que es observable, por lo menos en principio, de lo que es imposible de verificar y constituye, bien un acto de fe, bien una hipótesis de trabajo. De hecho —como ya he dicho— es muy probable que la mayoría de astrónomos no tengan ningún inconveniente *a priori* contra el condicionamiento que propongo. Haría tiempo que éste se habría convertido en algo banal si se le conocieran consecuencias dignas de atención, esto es, si se hubiera reconocido que constituye, no un refinamiento formal, sino una auténtica generalización. Así pues, ya sea para apoyar el acto de fe, o para demostrar que la hipótesis de trabajo es simplificadora y, en consecuencia, algo útil, es necesario estudiarla en serio.

*Digresión acerca de los lugares de parada del vuelo de Rayleigh y de la dimensión*  
 $D = 2$

La combinación de hipótesis, según las cuales la densidad global se anula mientras que el principio cosmográfico condicional sigue siendo válido, excluye el antiguo modelo de Fournier-Charlier; a primera vista, parece incluso como si dicha combinación contuviera una contradicción interna. Pero demostraré que esto no es sí; la compatibilidad de estas hipótesis será ilustrada de entrada de un modo muy artificial, dando un nuevo papel a un ejemplo que tiene la ventaja de que el lector ya estará familiarizado con él (lo hemos utilizado ya en el Capítulo 3), y que es también muy antiguo, pues se remonta por lo menos a Rayleigh 1880. Su defecto mortal es que no tiene ni la dimensión ni el grado de conectividad exigidos por los hechos. Este modelo irá seguido de otros más realistas.

Supongamos que un cohete parte de un punto  $\Pi(0)$  del espacio, en una dirección distribuida de manera aleatoria isótropa. La distancia entre  $\Pi(0)$  y el punto  $\Pi(1)$ , definido por la primera parada después de  $\Pi(0)$ , será también aleatoria, respondiendo a una distribución prescrita de antemano. Lo esencial de la misma es que los saltos no toman valores grandes sino muy de vez en cuando, de modo que la esperanza matemática del cuadrado de la longitud del salto,  $\langle [\Pi(1) - \Pi(0)]^2 \rangle$ , sea finita. A renglón seguido, el cohete vuelve a partir hacia  $\Pi(2)$ , definido de modo que los vectores  $\Pi(1) - \Pi(0)$  y  $\Pi(2) - \Pi(1)$  sean independientes y respondan a la misma distribución. El cohete sigue así *ad infinitum*.

Además, se puede determinar los lugares de parada anteriores  $\Pi(-1)$ ,  $\Pi(-2)$ , etc., haciendo actuar el mismo mecanismo en sentido inverso. Dado que dicho mecanismo no hace intervenir para nada el sentido del tiempo, basta con tomar dos trayectorias independientes a partir de  $\Pi(0)$ . Una vez hecho esto, borremos los rastros rectilíneos dejados por los cohetes, y examinemos el conjunto de los lugares de parada sin tener en cuenta el orden en que han ido apareciendo. Por la propia construcción, la secuencia de los lugares de parada sigue la misma distribución cuando se la examina desde cualquiera de los puntos  $\Pi(m)$ . Así pues, este conjunto satisface el principio cosmográfico condicional, en un sentido estadístico. Vamos a suponer que en cada lugar de parada se ha «sembrado» un pellizco de materia.

Si el vuelo se limita al plano (como en el Capítulo 3), el conjunto de lugares de parada está repartido casi uniformemente. De hecho, si los saltos responden a una distribución gaussiana, el conjunto de los lugares satisface el principio cosmográfico universal. De cualquiera de las formas, el número de lugares contenidos en una esfera de radio  $R$  y centro  $\Pi(k)$  tiene un orden de magnitud de  $M(R) \propto R^2$ . En el espacio, por el contrario, los  $\Pi(k)$  se hallan repartidos tan irregularmente que se tiene también  $M(R) \propto R^2$  en vez de  $M(R) \propto R^3$ .

El valor del exponente,  $D = 2$ , independientemente de la dimensión del espacio ambiente y de la distribución de los saltos  $\Pi(k) - \Pi(k - 1)$ , es una consecuencia directa del teorema del límite central clásico. Este afirma que, cuando  $\langle [(\Pi(k) - \Pi(k - 1))]^2 \rangle$ , la distribución de la distancia recorrida,  $\Pi(k) - \Pi(0)$ , es asintóticamente gaussiana, sea cual sea la distribución exacta de los saltos  $\Pi(k) - \Pi(k - 1)$  y  $\Pi(k) - \Pi(0)$ . En el espacio se deduce que la densidad media de los lugares es proporcional a  $R^{-1}$  y tiende hacia cero cuando  $R \rightarrow \infty$ . De hecho, si se elige el origen del sistema de referencia con una probabilidad uniforme en el espacio, se puede demostrar que una esfera de radio  $R$  finito no contendrá ningún lugar  $\Pi(k)$ . Así pues, vista desde un origen arbitrario, la distribución de los lugares es degenerada, excepto en casos de probabilidad total nula. En resumen, el principio cosmográfico es aplicable para los lugares de parada, pero únicamente en un sentido a la vez estadístico y condicional; más generalmente, a consecuencia de que  $M(R)$  crece más lentamente que  $R^3$ , es necesaria la restricción del principio cosmográfico a una forma condicional.

El hecho de que  $M(R)$  crezca como  $R^2$  concuerda con la idea de que, en uno de los múltiples sentidos formales de la palabra «dimensión», la dimensión del conjunto de los lugares  $\Pi(k)$  es igual a 2. Sin embargo, el vuelo descrito más arriba procede por saltos discretos y no puede por lo tanto tener homotecia interna. Con objeto de poder aplicar el concepto de dimensión de homotecia, tal como lo hemos definido anteriormente para la curva de von Koch y el polvo de Cantor, es necesario hacer continua la variable  $k$ ; y al mismo tiempo interpolar.

Cuando los saltos de un vuelo de Rayleigh son gaussianos, la interpolación es posible y conduce al movimiento browniano isótropo. Esto puede hacerse por etapas, que recuerdan las de la construcción de von Koch, aunque en nuestro caso estén sometidas al azar. En primer lugar se establecen las posiciones para  $k$  entero; después se interpola para  $k$  múltiplo de  $1/2$ , con lo que la trayectoria se alarga, y así sucesivamente hasta el infinito. En el límite, el «salto elemental» entre  $k$  y  $k + dk$  es una variable gaussiana de media nula y variación igual a  $dk$ . Sin entrar en detalles, digamos que el movimiento browniano es, en efecto, homotético con dimensión fractal  $D = 2$ , tanto en el plano como en el espacio. Resulta de esto que llena el plano de manera densa, mientras que deja el espacio

prácticamente vacío.

Pero volvamos a una cuestión que ya planteamos en el caso de las aproximaciones llevadas a un grado extremo, pero finitas, de la costa de Bretaña: dado que el concepto de dimensión implica un paso al límite ¿tiene alguna utilidad cuando  $k$  es discreto? Mi respuesta, siempre por consideraciones referentes a la naturaleza de la dimensión física efectiva, es una vez más afirmativa.

*Un concepto generalizado de densidad y una observación acerca de la expansión del Universo*

Sin perjuicio de la estacionariedad condicional, a cada parada de un vuelo de Rayleigh se le puede asignar una masa elegida al azar, siendo las distintas masas independientes; si se quiere una «distribución uniforme» se elegirán masas iguales. Análogamente, es cómodo pensar que la trayectoria browniana tiene una densidad uniforme  $\delta$ , si se cumple que la masa entre los puntos de parámetros  $k'$  y  $k$  es igual a  $\delta|k' - k|$ .

Veamos qué implicaciones tiene esto bajo el punto de vista de la expansión uniforme que, según Edwin Hubble ha demostrado, rige nuestro Universo. Se admite habitualmente que dicha expansión parte de una densidad uniforme  $\delta$ . Si el Universo está en expansión,  $\delta$  se modifica progresivamente, pero sin perder nunca la uniformidad. Generalmente, se cree que cualquier otra distribución cambiaría con la expansión, pero basta un solo contraejemplo para demostrar que las cosas no son así. Si se parte de la distribución browniana, la expansión tiene el mismo efecto que en el caso uniforme:  $\delta$  cambia, pero la uniformidad persiste. Por consiguiente, los lugares de Rayleigh son necesariamente compatibles con la expansión del Universo.

*El Universo sembrado: un nuevo modelo de la distribución de las galaxias*

El modelo browniano presenta, por lo menos, dos características inaceptables en cosmografía: es una curva continua, hecho que no se manifiesta en lo más mínimo en las distribuciones estelares, y el valor de su dimensión,  $D = 2$ , es mayor que el  $D \sim 1,3$  sugerido por las observaciones. Por consiguiente, para salvar las virtudes del movimiento browniano, incluida la invariancia frente a la expansión del Universo, habrá que modificarlo en algún aspecto esencial.

*Lugares de parada de un vuelo de Lévy. Las galaxias consideradas como un polvo fractal de dimensión  $D < 2$*

La generalización que propongo sustituye el vuelo de Rayleigh por lo que yo llamo un vuelo de Lévy. Este atribuye una probabilidad no despreciable a los valores muy grandes de la distancia  $U$  entre  $\Pi(k)$  y  $\Pi(k + 1)$ , de modo que la esperanza matemática ( $U^2$ ) se hace infinita. Más concretamente, para asegurar que los lugares de parada tengan asintóticamente homotecia interna, basta con tomar  $Pr(U > u) = u^{-D}$ ; ésta es la distribución hiperbólica que ya nos resulta familiar después del estudio de la distribución de las longitudes de las intermisiones en el Capítulo 4. Para que se cumpla nuestra condición de que ( $U^2$ ) =  $\infty$ , se ve fácilmente que es necesario que  $0 < D < 2$ .

El grado de arracimamiento que se sigue de ello está ilustrado en las Figuras 106 a 111, que muestran, bien sea detalles que se ven en proyecciones horizontales sin

perspectiva, o bien el mapa de la región «ecuatorial» celeste. A modo de comparación, la Figura 112 presenta una porción del cielo verdadero. Visualmente, el arracimamiento correspondiente a  $D = 1$  es excesivo, mientras que  $D = 1,3$  concuerda bastante bien con las estimaciones de Gérard de Vaucouleurs.

*¿Cómo se podrá explicar el conflicto entre este valor y el  $D = 1$  teórico?*

La consecuencia principal de esta nueva ley,  $Pr(U>u) = u^{-D}$  es la siguiente: tanto en el plano como en el espacio (si  $D < 1$ , vale también para la recta), la cantidad  $\langle M(R) \rangle$  es proporcional a  $R^D$ , siendo el cociente  $M(R)/\langle M(R) \rangle$  una variable aleatoria independiente de  $R$ . En particular, y contrariamente a lo que se constata en el vuelo de Rayleigh, el exponente de un vuelo de Lévy depende explícitamente de la distribución de los saltos. Esto se debe al hecho de que, cuando  $(U^2, = \infty$ , el teorema del límite central clásico deja de ser válido, y tiene que ser reemplazado por un teorema del límite central especial, cuya forma depende de la ley que rige los saltos. El límite constituye la versión tridimensional de una variable aleatoria «estable» en el sentido de Paul Lévy (Capítulo 14). El caso escalar está tratado en el volumen 2 de Feller 1966. El caso tridimensional con  $D = 3/2$  aparece en física en relación con el problema de Holtzmark, discutido por Feller 1966 y por Chandrasekhar 1943. La ley estable correspondiente a  $D = 1$  se denomina ley de Cauchy, y de ahí el nombre «vuelo de Cauchy» empleado en las Figuras 106 y 108.

En resumen, gracias a la posibilidad de controlar la ley que rige los saltos, nuestra elección de la dimensión resulta ser más libre: se puede obtener el valor  $D = 1$  o cualquier otro valor sugerido por los resultados observacionales.

Sin embargo, el modelo cosmográfico que he basado en el vuelo de Lévy no ha de tomarse demasiado en serio; su principal virtud radica en el hecho de que da una demostración, a la vez simple y constructiva, del carácter no trivial de mi generalización condicional del principio cosmográfico.

*P.S.* Mi modelo ha resultado tener una segunda virtud: las correlaciones teóricas entre las densidades galácticas tomadas entre 2 y 3 puntos del cielo, calculadas en Mandelbrot 1975u, resultan ser *idénticas* a las que obtiene Peebles 1980 empíricamente. Véase también el *P.S.* de la pág. 112.

*Comparación con los errores telefónicos*

Si un vuelo de Lévy con  $D < 1$  está constreñido a permanecer sobre una recta, sus lugares de parada se parecen al conjunto que se ha obtenido en el Capítulo 4, barajando al azar el orden de las intermisiones de un polvo de Cantor para el que  $\eta > 0$ . La diferencia estriba en que las intermisiones del Capítulo 4 se suceden de izquierda a derecha, mientras que las del vuelo de Lévy son isótropas: van al azar, con la misma probabilidad en ambas direcciones. La razón por la que se ha tenido que hacer isótropa la construcción es evidentemente que la idea de volar de izquierda a derecha no es generalizable ni al plano ni al espacio, al no ser éstos orientables.

Sin embargo, en el caso de la recta, en el que cabe la posibilidad de elegir entre dos métodos, la construcción isótropa introduce complicaciones. En primer lugar, si el origen es un punto del conjunto, los conjuntos de lugares con abscisa positiva o negativa son independientes en el vuelo de izquierda a derecha, pero no lo son en el caso de vuelo isótropo. En segundo lugar, en un vuelo de izquierda a derecha cada salto es idéntico a una

sola intermisión. Por el contrario, un vuelo isótropo vuelve constantemente hacia atrás, para posarse en medio del intervalo correspondiente a un salto anterior; por consiguiente, casi cada intermisión resulta de la intersección de varios saltos. Sin embargo, debido a la homotecia interna global, la ley que da la longitud de una intermisión conserva la forma hiperbólica.

Hay otra complicación debida a lo mismo: recordemos que con objeto de establecer la tendencia al «arracimamiento jerárquico», el Capítulo 4 introduce los intervalos llamados « $u_0$ -ráfagas», que separan saltos de longitud mayor que  $u_0$ . En la construcción de izquierda a derecha, está excluida la posibilidad de que dos ráfagas tengan puntos comunes. En la construcción isótropa, dicha posibilidad no queda excluida, pero se demuestra que su probabilidad sigue siendo suficientemente pequeña, y tanto más cuanto menor es  $D$ , para que se pueda hablar también de ráfagas jerarquizadas.

*Universos fractales obtenidos por aglutinaciones sucesivas*

Volvamos ahora a un punto de vista más físico, para señalar que numerosos autores han dado una explicación diametralmente opuesta a la de Hoyle para la formación de las estrellas y los otros objetos celestes. No invocan una cascada *descendente*, esto es, la fragmentación de masas muy grandes y muy difusas en pedazos cada vez menores, sino una cascada *ascendente*, a saber, la aglutinación de un polvo muy disperso en pedazos cada vez mayores. El problema —que volveremos a tratar en el momento oportuno— se parece mucho al que plantean las cascadas en la teoría de la turbulencia. Ahora bien, en este último dominio los resultados más recientes sugieren la coexistencia de ambos tipos de cascada; se puede pues esperar que la disputa confusa entre los partidarios de la fragmentación y los de la coagulación sea resuelta en un futuro no muy lejano.

*P.S.* El estudio de los agregados fractales se ha convertido en un campo muy activo a partir de 1982.

LÁMINA 104. *El universo según Fournier D'Albe*

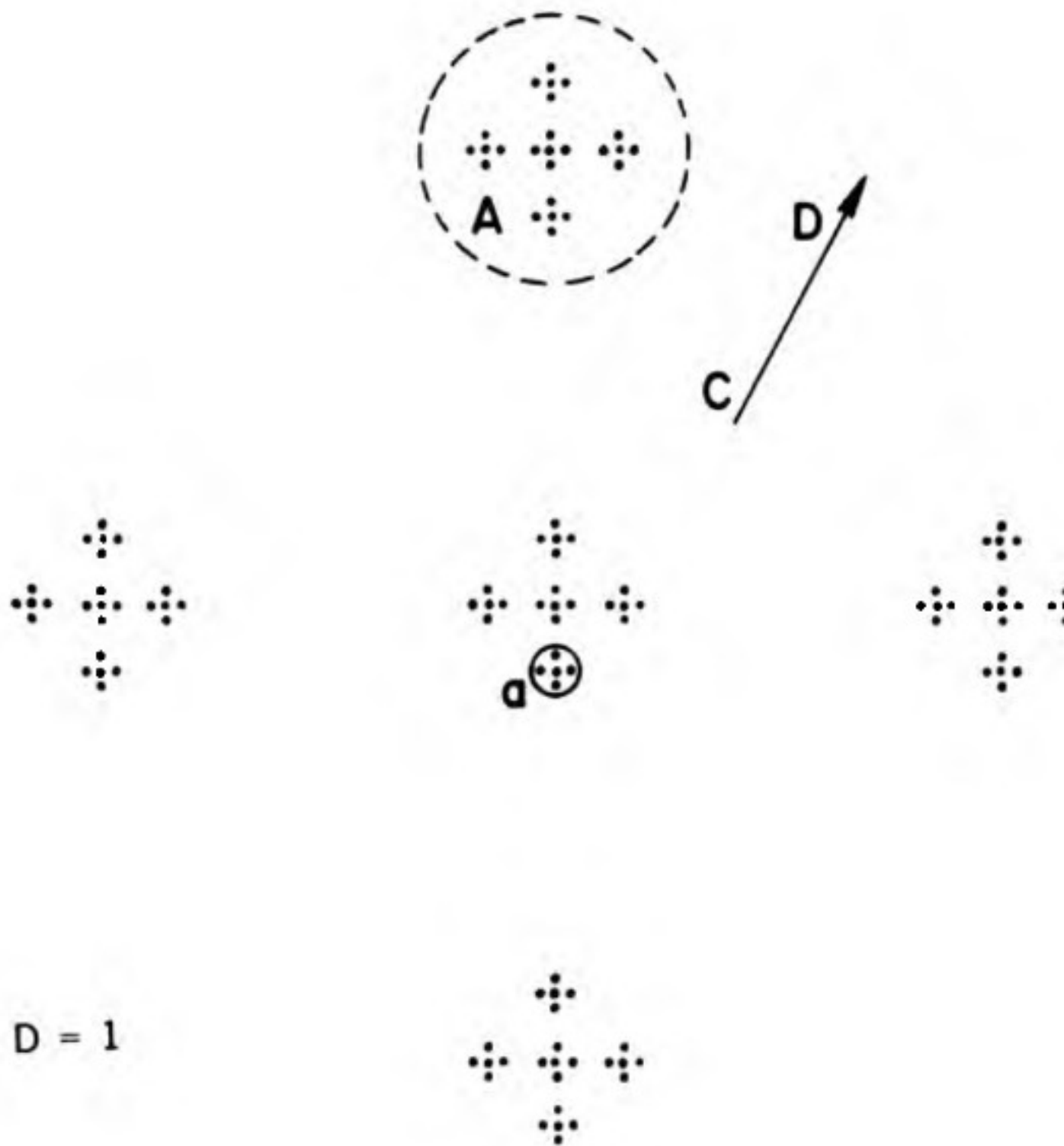


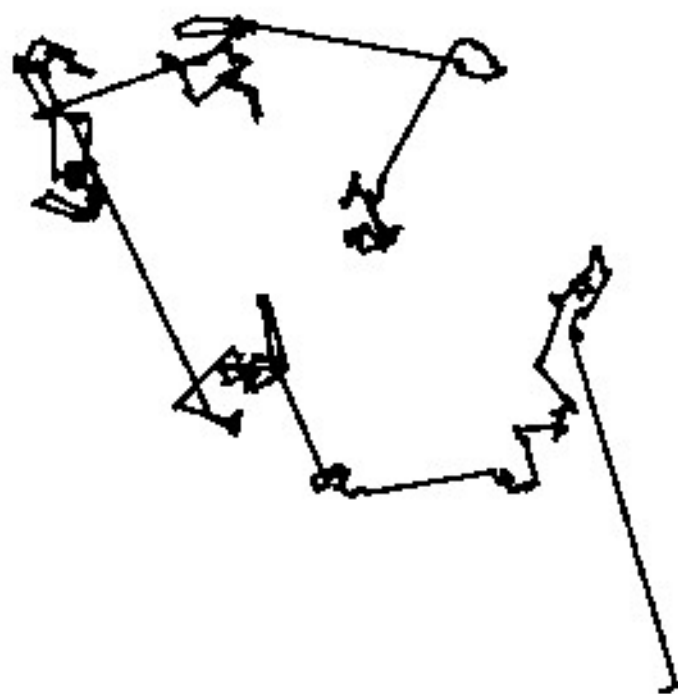
FIGURA 104

Parafraseando la leyenda del original, en Fournier 1907: «Este diagrama describe un multi-Universo basado en un principio cruciforme u octaédrico. Aunque no sea el esquema ni del inframundo ni del supramundo, el esquema es útil, por cuanto demuestra que puede

haber una jerarquía infinita de universos homotéticos sin que “el cielo esté en llamas”. Si las menores cruces visibles representan los átomos del inframundo, la figura rodeada por el círculo a representará una estrella del inframundo, esto es, un átomo del nuestro. El círculo A corresponderá a una estrella de nuestro mundo y el todo representará una “superestrella”».

LÁMINA 106. *Un universo sembrado de Mandelbrot, de arracimamiento medio. D*  
*= 1*

A



$D = 1$

B



## FIGURA 106

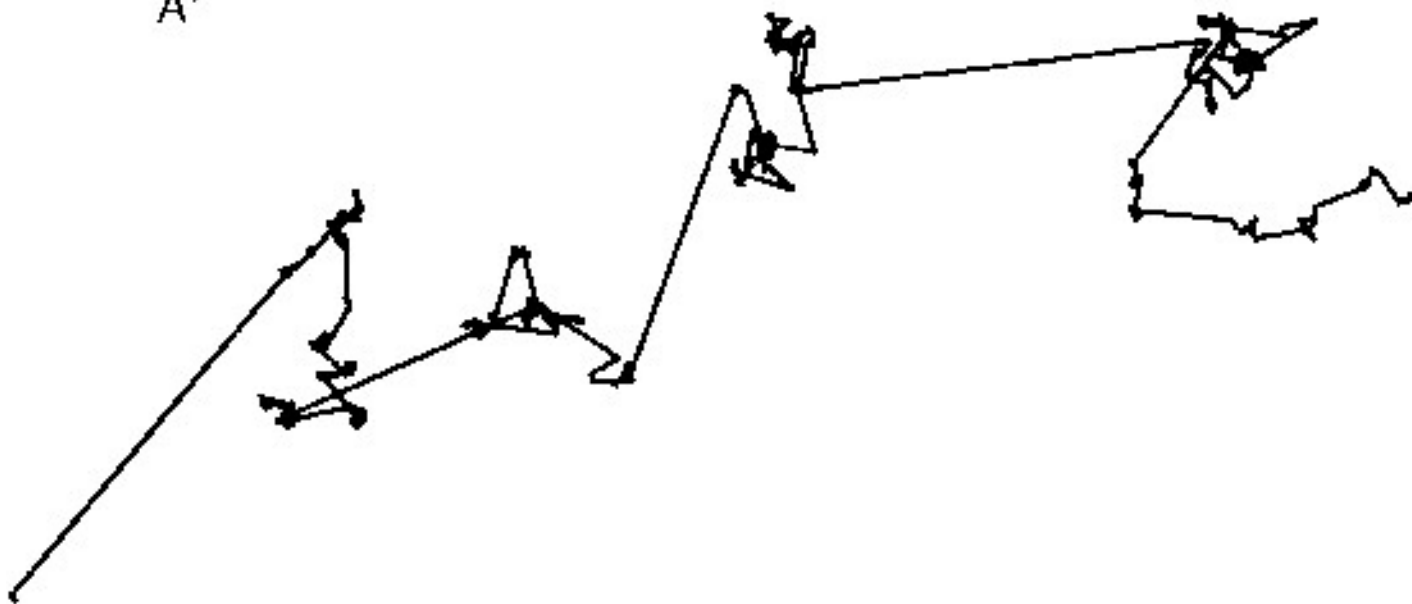
Los diagramas A y B de la figura 106 ilustran la simulación por ordenador de un vuelo de Cauchy, y la utilización del mismo para engendrar un Universo «sembrando» un punto en cada parada.

A es una sucesión de segmentos de recta, de dirección isótropa —todos los ángulos tienen la misma probabilidad— y de longitud según la densidad de probabilidad  $u^{-2}$ , que corresponde a  $D = 1$ . A la escala de reproducción de esta figura, los segmentos engendrados son en su mayoría demasiado pequeños para ser visibles; en otras palabras, allá donde se ve que se unen dos segmentos visibles, no se tiene un punto aislado sino un pequeño círculo de puntos.

En B se han borrado las líneas generatrices y cada lugar de parada está representado por una «galaxia». Por construcción, si la distribución de las galaxias se examina desde una de ellas, la distribución de las otras es, desde el punto de vista estadístico, exactamente la misma. En este sentido, se puede „considerar legítimamente que cualquier galaxia es el «centro del mundo». Eso es lo esencial del «principio cosmográfico condicional» propuesto en el presente Ensayo. Así pues, el diagrama que tenéis aquí presenta claramente la validez de dos de mis principales temas fractales: a) mi principio condicional es perfectamente compatible con un arracimamiento de apariencia jerárquica y rico en niveles, y b) este arracimamiento y una gran variedad de otras configuraciones de toda clase se pueden manifestar en un objeto en el que nada de esto se había introducido adrede. El grado de arracimamiento que corresponde a la dimensión  $D = 1$  puede ser considerado útilmente como «medio», siendo los correspondientes a  $D > 1$  (Figura 110) y a  $D < 1$ , respectivamente, superior e inferior a la «media».

LÁMINA 108. *Vista lateral del mismo universo sembrado ( $D = 1$ )*

A'



$D = 1$

B'

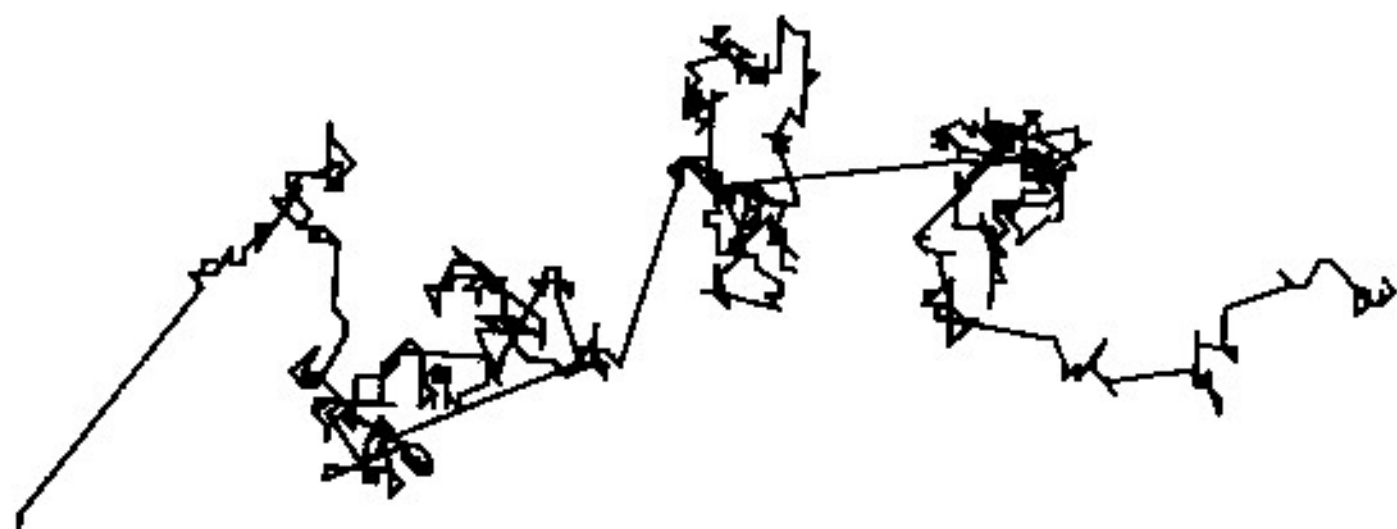


### FIGURA 108

Precisemos más la figura anterior indicando que se trata de un diagrama espacial que se había proyectado sobre el plano  $yOz$ , siendo  $O$  la esquina inferior derecha, y estando  $Oz$  dirigido verticalmente y orientado hacia arriba. (Las secuencias de las figuras nos obligan a utilizar los ejes de coordenadas no habituales).

Los diagramas  $A'$  y  $B'$  de la figura 108 son las proyecciones correspondientes al plano  $zOx$ , donde  $O$  es ahora la esquina inferior izquierda y  $Oz$  sigue siendo vertical. Este arreglo pretende ayudar al lector a formarse una idea del carácter espacial de la distribución. Ayudándose de la comparación de  $A$  y  $A'$ , el lector verá cómo el enorme super-super-cúmulo, especialmente rico en niveles jerárquicos, que constituía  $B$ , resulta haber sido provocado en buena parte por un efecto de perspectiva, y que en  $B'$  se resuelve en un objeto bastante más difuso. Lo mismo ocurre con su «núcleo», que en  $B$  parecía compacto pero que en  $B'$  está más desecho, en la parte inferior derecha. Por el contrario otros cúmulos se aglutinan.

LÁMINA 110. *Un universo sembrado, de arracimamiento inferior a la media.  $D = 1,5$*



$D = 1,5$



### FIGURA 110

Esta figura representa (como en las figuras anteriores) los saltos y los lugares de parada de un vuelo isótropo cuyos saltos responden a la distribución  $Pr(U>u) = u^{-15}$ . La semilla de simulador pseudoaleatorio no se ha cambiado, y la simulación consiste en acortar los largos segmentos interestelares, elevándolos a la potencia  $2/3$ . Esto los acorta tanto más cuanto mayores eran. Además, como hemos escogido la escala de la figura de modo que llenara el espacio disponible, los segmentos menores se han alargado automáticamente. Esta operación disminuye en gran medida la intensidad del arracimamiento, es decir, no sólo disminuye la separación entre los cúmulos sino también el número de niveles jerárquicos aparentes. Para las necesidades de aplicación a la astrofísica, no cabe duda de que se ha ido demasiado lejos en el sentido de que todo parece indicar que la dimensión de las distribuciones estelares está entre 1 y 1,5.

*P.S.* En 1984 la mejor estimación era  $D \sim 1,23$ .

LÁMINA 111. *Zona ecuatorial de un universo sembrado, vista desde la Tierra y desde el «Centaurus»*

D = 1,2



FIGURA 111

Esta figura parte de un conjunto de puntos que fue generado por el mismo procedimiento que los cúmulos aislados representados en las figuras de la 106 a la 110. Sin embargo, la dimensión es  $D = 1,2$ . Más importante aún es que aquí se puede ver una misma estructura global, proyectada sobre dos esferas celestes distintas. El centro de la primera es (pongamos por caso) la Tierra, mientras que el centro de la segunda lo podemos llamar «el Centauro», pues es la centésima estrella en el orden de la construcción. En la práctica sólo se han podido representar las zonas ecuatoriales.

LÁMINA 112. *La distribución de las galaxias verdaderas*

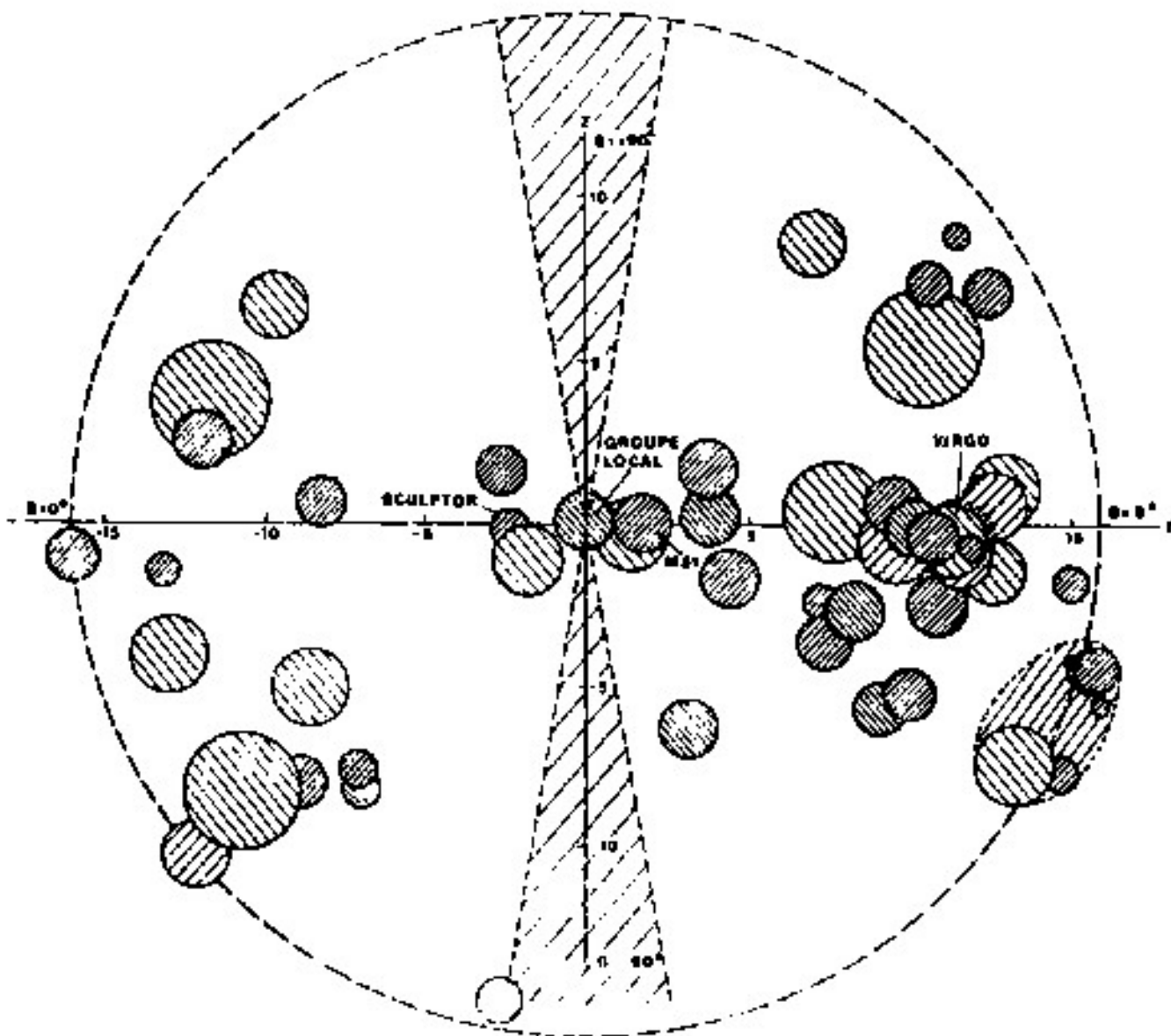


FIGURA 112

Esta figura se refiere a los principales grupos de galaxias cuya distancia a la Tierra

es inferior a 16 megaparsecs, y muestra cómo hay un parecido genérico entre la realidad y el modelo descrito en el texto. Visto de cerca, el parecido resulta menos sorprendente (véase el *P.S.*). Esta gráfica se ha reproducido, con la autorización del editor, de la obra *Introduction à la Cosmologie* de Jean Heidmann, © 1973 by Presses Universitaires de France.

*P.S.* La anterior figura 111 muestra cómo mi modelo de Universo sembrado da lugar inevitablemente a grandes vacíos. Los astrónomos me han comunicado inmediatamente que este es el caso, en efecto, con la única salvedad de que el tamaño de los vacíos de la página 111 es excesivo. En la figura 143 se verá como me las he arreglado para obtener un modelo fractal menos «lagunoso».

## Capítulo 7

### Modelos del relieve terrestre

Ahora que ya conocemos mejor el movimiento browniano ordinario, vamos a pasar a los vagabundeos sin bucles, a los que les está prohibido —por definición— pasar más de una vez por un mismo punto. Nos servirán de transición hacia las curvas brownianas fraccionarias, que simplemente tienen una tendencia a no volver atrás. Examinaremos finalmente las superficies brownianas, primero las ordinarias y después las fraccionarias, que nos proporcionarán un modelo de todo el relieve terrestre, y nos permitirán representar las costas.

*Preliminares: vagabundeos sin bucles. Efecto de Noé y efecto de José*

Para empezar, dado un enrejado de puntos, en el plano o en el espacio (por ejemplo, aquéllos cuyas coordenadas son todas enteros), consideremos el vagabundeo que pasa de uno de estos puntos hacia uno de sus vecinos escogido al azar, de manera que aquéllos que no han sido visitados aún tienen la misma probabilidad de serlo en el instante siguiente, y los otros tienen probabilidad nula (están excluidos). En el caso degenerado de la recta, este vagabundeo continúa indefinidamente en una u otra dirección sin invertirse jamás. Pero en los casos no degenerados del plano o el espacio, el problema es muy interesante y muy difícil. Su importancia práctica en el estudio de los polímeros es, sin embargo, tan grande, que ha sido objeto de simulaciones muy detalladas.

El resultado que nos interesa es el siguiente, debido a Domb 1964-65 y descrito por Barber & Ninham 1970. Después de  $n$  pasos, la media cuadrática del desplazamiento  $R_n$  es del orden de magnitud de  $n$  elevado a la potencia  $2/D$ . Esto sugiere claramente que en un círculo o una esfera de radio  $R$  alrededor de un sitio, debe esperarse encontrar aproximadamente  $R^D$  sitios más. ¡Qué tentador es sacar la conclusión de que este  $D$  es una dimensión! Sus valores son los siguientes: para la recta,  $D = 1$ ; para el plano,  $D = 4/3$ ; para el espacio ordinario,  $D = 5/3$ ; y por fin, en un hiperespacio cuya dimensión tienda hacia infinito, el riesgo de que se forme un bucle disminuye y  $D \rightarrow 2$ .

Parece una coincidencia que el  $D = 4/3$  correspondiente al plano represente los datos de Richardson para las costas más accidentadas. De todas formas no hay por qué insistir más en ello, pues, en el caso de vagabundeos sin bucles, el principio cosmográfico, sobre cuya importancia ya hemos insistido bastante, no parece ser aplicable bajo ninguna de sus formas.

Comparemos, sin embargo, el comportamiento de  $M(R)$  para un vuelo de Lévy y para un vagabundeo sin bucles. La forma analítica es la misma, pero las razones en las que se basa son sumamente diferentes. En efecto, el vuelo de Lévy procede por saltos independientes, y  $D < 2$  se debe a la presencia ocasional de valores muy grandes separando los distintos racimos. En un paseo aleatorio sin bucles los saltos tienen una longitud fija, y  $D < 2$  se debe a que, por el mismo hecho de evitar las posiciones ocupadas con anterioridad, el movimiento adquiere una especie de persistencia.

Mi texto inédito acerca de las *Formes Nouvelles du hasard dans les Sciences* (retomado en parte en Mandelbrot y Wallis 1968 y en Mandelbrot 1973), bautiza estas

causas con los nombres de Efecto de Noé y Efecto de José, respectivamente, honrando así a dos héroes bíblicos, el del Diluvio y el de las siete vacas gordas y las siete vacas flacas, respectivamente.

Vale la pena tomar en serio la historia bíblica de José. No cabe duda de que se refiere a un acontecimiento real, esto es, a una serie de crecidas y estiajes del Nilo, pues los niveles del Nilo son extraordinariamente persistentes, y lo mismo ocurre con muchos otros ríos. Hay que señalar este fenómeno porque vamos a utilizar largamente la descripción matemática que he dado de él en Mandelbrot 1965h y, con más detalles e ilustraciones, en Mandelbrot y Wallis 1968. Consiste en representar las riadas anuales del Nilo mediante los crecimientos de un cierto proceso estocástico, que se obtiene modificando el movimiento browniano escalar de la Figura 71, para suavizarlo y hacerlo menos irregular *a cualquier escala*. La intensidad del alisado, y por ende la de la persistencia de los crecimientos, depende de un solo parámetro; para el proceso correspondiente al valor  $H$  de este parámetro he propuesto el nombre de *movimiento browniano fraccionario*, que se denotará por  $B_H(t)$ . Por convenio, el valor  $H = 0,5$  corresponde al caso clásico, en el que no hay ninguna dependencia, mientras que la persistencia aumenta progresivamente a medida que  $H$  crece de 0,5 a 1. Así pues, las riadas anuales del Nilo, que están muy lejos de ser independientes, pueden ser representadas por los crecimientos anuales de un movimiento browniano fraccionario de parámetro  $H = 0,9$ . Para el Loira,  $H$  está más cerca de 0,5; para el Rhin,  $H = 0,5$ , salvo errores.

Todo esto es apasionante, pero no constituye más que una preparación para el estudio de las curvas en el plano. Allí también, es razonable tratar de generalizar el movimiento browniano de modo que su dirección tienda a persistir, sin perder su carácter de curva continua. (El Capítulo 6, muy al contrario, trata de romper la continuidad sin introducir la persistencia). Esto equivale a buscar, no la obligación, sino simplemente la tendencia, más o menos intensa, a que la trayectoria evite intersecarse a sí misma. Si se quiere, además, conservar la homotecia interna —como ya es regla en el presente Ensayo— lo más sencillo será que las dos coordenadas estén sometidas a movimientos brownianos fraccionarios, estadísticamente independientes y con el mismo parámetro  $H$ .

Las Figuras 124 a 126 representan tres ejemplos de curvas obtenidas de esta manera. Si hubiéramos dibujado cada una de las coordenadas en función del tiempo, su forma habría diferido poco de la de la Figura 57, mientras que en dos dimensiones el efecto de la elección de  $H$  es incomparablemente más acentuado. Para el primer trazado (Figura 124)  $H$  toma el valor 0,9, que ya hemos dicho que explica el Efecto José para el Nilo. Al tener así una tendencia muy fuerte a continuar en cualquier dirección en la que se haya metido, se ve claramente cómo nuestro punto se difunde mucho más rápidamente de lo que lo haría con un movimiento browniano normal; por ello, consigue evitar los bucles muy visibles. Hasta tal punto que —volviendo a una cuestión discutida en el Capítulo 2— nuestra curva daría *a priori* una imagen muy razonable de la forma de las costas menos irregulares.

Esto lo confirma además el valor de la dimensión fractal: la  $D$  del movimiento browniano fraccionario plano es  $1/H$ . Con ello resulta ser mayor o igual que 1 —como ha de ser, intuitivamente, para una curva continua—. Además, el caso llamado «persistente» con  $H > 1/2$  da una  $D$  inferior a 2, lo que intuitivamente concuerda también con el hecho de que dicha curva recubre el plano de una manera menos densa que el movimiento browniano ordinario. Así pues, en el caso específico de la Figura 124, se tiene  $D = 1/0,9 = 1,11$ . Para trazar las Figuras 125 y 126, se ha cambiado  $H$ , conservando la semilla de generador

pseudoaleatorio ya utilizada en la Figura 124. Este procedimiento subraya el aumento progresivo de la irregularidad, que es consecuencia de la disminución de  $H$ ; se ve también cómo la tendencia a evitar los bucles se debilita a medida que  $D$  aumenta. Por consiguiente, nuestra búsqueda de un modelo de costas no ha terminado aún; la reanudaremos dentro de unos instantes.

Señalemos que el movimiento browniano fraccionario escalar puede definirse también para  $0 < H < 0,5$ , pero una curva cuyas dos coordenadas son tales funciones se difunde *más lentamente* que el movimiento browniano usual, volviendo constantemente sobre lo andado, y cubriendo el plano repetidas veces. Como en el caso  $H = 0,5$ , la dimensión fractal toma el mayor valor concebible en el plano, esto es,  $D = 2$ .

*Modelo browniano del relieve terrestre y estructura de las costas oceánicas*

Veamos dónde estamos: hemos fracasado ya un par de veces en la búsqueda de un atajo que nos permitiera representar una costa sin preocuparnos por el relieve. Ya es hora de darse cuenta de que esta esperanza no era razonable, y de atacar el problema de las costas junto con el de todo el relieve en su conjunto. Dentro de poco construiremos un modelo que genera superficies estadísticamente idénticas a la representada en la Figura 128, pero tenemos que dar antes un último rodeo.

Como sabemos de sobra las dificultades que plantean los bucles, abordaremos el problema del relieve a través de unas curvas características, que no puedan tener ninguno. Si no tenemos en cuenta los salientes rocosos, nos convendrá utilizar los cortes verticales. La leyenda de la Figura 71 hace notar que un paseo aleatorio escalar ya da una idea de la forma de dichos cortes, una idea grosera, claro está, pero que no es en absoluto descabellada como primera aproximación. ¿No tendríamos, en nuestra caja de herramientas de constructores profesionales de modelos, una superficie aleatoria cuyos cortes verticales fueran movimientos brownianos? Hasta ahora no disponíamos de esta herramienta en nuestra caja, pero yo propongo que la introduzcamos: se trata de la función browniana de un punto,  $B(P)$ , tal como se halla definida por Lévy 1948. Su inventor ha sabido describir maravillosamente sus principales aspectos, sin haber podido (¿o sin haber querido, quizá?) dibujarla; pero para aplicarla a casos concretos, es necesario hacerse una idea intuitiva de ella. Estoy convencido de que el dibujo abajo de la Figura 130 (inferior derecha) de este Ensayo es la primera muestra publicada de la misma.

Primera constatación: su parecido general con la superficie de la Tierra es real pero grosera, todo lo más es aproximado; sin embargo, nos anima a analizar más de cerca hasta qué punto hemos progresado en el estudio de las costas oceánicas, definidas como las curvas formadas por los puntos que se encuentran al nivel del mar. La figura 132, en la parte superior, nos presenta una gráfica obtenida de este modo; nos dan por fin el ejemplo tan buscado de curva carente prácticamente de puntos dobles que, por una parte, tiene una dimensión fractal superior a 1, y que, además, nos recuerda algún lugar del globo terrestre. En este caso concreto, la dimensión es 1,5, y la gráfica nos recuerda mucho al norte del Canadá, las Islas de la Sonda (el parecido aumenta si baja el nivel del mar, con lo que las islas se empequeñecen) o incluso (si el mar baja más aún) al mar Egeo.

El modelo es aplicable también a otros ejemplos, pero los datos de Richardson sugieren en general una  $D$  menor que 1,5. Es una pena, puesto que el valor 1,5 hubiera sido fácil de explicar: en efecto, en 1975b demostré que la función  $B(P)$  es una excelente aproximación para el relieve, el cual habría sido engendrado por una superposición de fallas

rectilíneas independientes.

El modelo generador es el siguiente: se parte de una meseta horizontal, se la rompe a lo largo de una recta elegida al azar, y se introduce una especie de acantilado, una diferencia de nivel aleatoria entre ambos lados de la fractura; después se vuelve a comenzar, y se continua indefinidamente. Al proceder así, se está generalizando al caso del plano la construcción de Poisson indicada al final de la leyenda de la Figura 71. Se ve cómo el razonamiento comprende por lo menos un aspecto de la evolución tectónica, y cómo nos lleva a añadir  $B(P)$  a la lista de los azares primarios que hemos comentado en el Capítulo 3.

Sin embargo, al hacer esto, hemos de renunciar a un aspecto que hasta el momento había sido característico de estos azares, a saber, la independencia de sus partes. La discusión de este punto es inevitablemente técnica, y debe ser considerada como una digresión. Consideremos dos puntos, uno al Este y otro al Oeste de una sección Norte-Sur del relieve. Está claro que el conocimiento del relieve a lo largo de la sección reduce la indeterminación que existe en lo referente al punto del Este. Ahora bien, se puede demostrar que dicha indeterminación disminuye también si se conoce el relieve en el punto del Oeste. Si, por el contrario, la indeterminación no hubiera sido afectada, el probabilista habría dicho que el relieve es markoviano, cosa que habría expresado una cierta independencia entre las pendientes de uno y otro lado de la línea Norte-Sur. (Para el tipo irregular de superficies que nos interesan aquí, la idea de pendiente es peligrosa; pero aquí no hay ningún inconveniente en dejar este punto en suspenso). La influencia del relieve del Oeste sobre el relieve del Este expresa que el proceso generador manifiesta inevitablemente una fuerte dependencia global.

#### *Modelo browniano fraccionario del relieve*

Desafortunadamente, repitámoslo, el  $D$  que se observa para las costas es en general distinto de 1,5, y ello nos obliga por lo tanto a proseguir nuestra búsqueda si queremos un modelo que tenga una validez más general. Hemos de buscar incluso en una dirección no habitual, pues en el Capítulo 2 me esforzaba por que se aceptara que  $D$  había de ser superior a 1, y de ahora en adelante, necesitamos hacerlo descender por debajo de 1,5. Para tener costas menos irregulares, nos hacen falta, por lo tanto, cortes verticales menos irregulares. Afortunadamente, las secciones anteriores de este capítulo nos han preparado bien para esta contingencia, pues dos posibilidades saltan a la vista.

En primer lugar, para tener un modelo de los cortes verticales, basta sustituir la función browniana usual por un ejemplo apropiado de las variantes fraccionarias introducidas más arriba. En efecto, hay superficies aleatorias  $B_H(P)$  cuyos cortes verticales son funciones  $B_H(t)$ . Además, he puesto a punto unos algoritmos que permiten simularlas en un ordenador. La superficie tiene por dimensión  $3 - H$ , y sus secciones planas —entre las que se cuentan las costas, las otras curvas de nivel y también los cortes verticales— tienen dimensión  $2 - H$  todas ellas. No hay ya pues ninguna dificultad para obtener cualquier dimensión que los datos empíricos quieran exigir. Si se prevé  $D = 1,3$ , entonces será  $H = 0,7$ , valor que justifica nuestra Figura 128. Pero se conocen también ejemplos en los que  $H$  y  $D$  toman valores próximos a 1 (nuestra Figura 130, izquierda, recuerda la forma de los grandes macizos montañosos), y ocurre a veces que  $H$  es casi 0 y  $D$  casi 2 (nuestra Figura 130, superior derecha, recuerda las llanuras aluviales inundadas). Así pues, volviendo a la imagen ya utilizada de la caja de herramientas de confeccionar modelos, vemos cómo todas las funciones  $B_H(P)$  han de tener un lugar en ella.

Segunda posibilidad: partamos de la construcción de  $B(P)$  como superposición de fallas verticales rectilíneas, y acepillamos cada falla de modo que su pendiente aumente y disminuya de manera progresiva. Es posible obtener  $B_H(P)$  de esta manera, pero sólo a condición de imponer que el perfil de la falla tenga una cierta forma muy específica, y de la que no es necesario decir que, *a priori*, no es demasiado natural. Es decir, que la tectónica imaginaria subyacente no es ni muy convincente ni muy explicativa.

A modo de digresión, vamos a esbozar distintas fuerzas susceptibles de efectuar la acción uniformizadora que se traduce en el aumento de  $H$ . Con la esperanza de explicar la persistencia «josefina» de los niveles de los ríos, los ingenieros comenzaron por tener en cuenta el agua que pueden almacenar los depósitos naturales de una temporada a otra; se esperaba, por lo tanto, que las descargas anuales de un río variaran más lentamente que lo predicho por la hipótesis de independencia. No obstante, pude demostrar que la acepilladura de las crónicas implicada por este modelo simplificado es en exceso exclusivamente local. Si se tiende a invocar tales fuerzas uniformizadoras para explicar el modelo browniano fraccionario, serán necesarias un gran número de acepilladuras sucesivas, de escalas diferentes. Se podría, por ejemplo, representar el nivel del Nilo como una superposición aditiva de toda una serie de procesos independientes; primero un azar de orden uno, que diese cuenta de los depósitos naturales (ya citados), que no comportase más que interacciones de un año para otro; a continuación, un azar de orden dos, que se calificaría de microclima, y que variase más lentamente aún; luego un clima variable, y así sucesivamente. Desde el punto de vista puramente teórico, hay que seguir así hasta el infinito; pero el ingeniero se detendrá en las escalas de tiempo del orden de magnitud del horizonte (siempre finito) de un proyecto de control de las aguas.

Volviendo ahora al relieve, hay que empezar dándose cuenta (ya era hora) de que es inconcebible que los modelos brownianos funcionen bien globalmente, por la sencilla razón de que la Tierra es redonda. Es cierto que Lévy definió también una función browniana sobre la esfera, pero parece ser que tampoco nos conviene. (*P.S.* Véase sin embargo Mandelbrot 1977f y 1982f). Lo mejor es, pues, detenerse en las escalas intermedias, admitiendo que las diversas acepilladuras sufridas por el relieve en el curso de la historia geológica tienen unas escalas espaciales cuyo máximo corresponde al orden de magnitud de los continentes. Si se pensara que toda la Tierra corresponde a un único valor de  $H$  y de  $D$ , habría sido necesario añadir que las intensidades relativas de las distintas acepilladuras tienen un carácter universal; pero si se admite (de un modo más realista) que  $H$  varía de un lugar a otro, estas intensidades relativas tendrían, también, un carácter local.

#### *Superficies proyectivas de las islas*

Un nuevo test de la adecuación del modelo browniano fraccionario se obtiene al comparar las distribuciones teórica y empírica de las superficies proyectivas de las islas del océano, es decir, de las superficies medidas después de la proyección sobre una esfera terrestre ideal. Esta definición complicada es inevitable, pues no hay ninguna duda de que, exactamente igual que ocurre con el perímetro de una isla, su verdadera superficie es infinita (o, si se prefiere así, depende del patrón de medida), mientras que la superficie proyectiva  $S$  no plantea ningún problema conceptual. Además, la distribución de superficies relativas salta a la vista cuando se mira un mapa; es incluso más evidente que la forma de las costas (pensemos en el mar Egeo). No es pues sorprendente que se haya hecho un estudio estadístico del caso; se encuentra que la distribución de  $S$  tiene una homotecia

interna, en otras palabras, es una distribución hiperbólica:  $Pr(S>s) = s^{-B}$ . Korcak había sacado la conclusión precipitada de que  $B = 0,5$ , pero yo encontré que era necesario un  $B$  más general. La simplicidad del resultado de Korcak llamó la atención de Maurice Fréchet; al escucharle se me ocurrió que para explicar este resultado sería suficiente con que el propio relieve tuviera también una homotecia interna, idea que acabó por conducirme al modelo browniano fraccionario del relieve.

Dicho modelo prevé que  $2B = D = 2 - H$ . Si  $H$  es muy próximo a 1, las áreas son muy desiguales, en el sentido de que, por ejemplo, la 10.<sup>a</sup> isla tiene una superficie casi despreciable en comparación con la de la isla mayor. La desigualdad disminuye con  $H$ . Observemos que el  $B$  correspondiente al relieve fractal con  $H = 0,7$  cae cerca de los datos empíricos relativos al conjunto de la Tierra.

#### *El problema de las superficies de los lagos*

Los autores que han examinado las áreas de las islas han hecho naturalmente lo mismo con los lagos, y sus resultados merecen también ser estudiados. Resulta que la ley hiperbólica da una representación tan buena como para el caso de las islas. Por consiguiente, un análisis superficial podría llevarnos a la conclusión de que no hay nada nuevo. Sin embargo, si se reflexiona acerca de este problema, esta nueva confirmación parece demasiado buena para ser creíble, pues la definición de un lago no es ni con mucho tan simétrica como la de una isla oceánica. Mientras que estas últimas las hemos podido definir de manera que haya una en cualquier lugar donde el relieve lo exija, la presencia de un lago depende de muchos otros factores: por ejemplo, sólo queda retenido por su fondo si éste es impermeable, y su área (pensemos en el Mar Muerto o en el lago de Chad) varía con la lluvia, el viento y la temperatura ambiente. Además, los sedimentos de los lagos afectan el terreno, suavizando su forma. El hecho de que la homotecia interna sobreviva a todas estas influencias heteróclitas merece, por consiguiente, una explicación particular. Un pesimista se inquieta ante estas dificultades, pensando si no están aún a tiempo de volverse atrás y poner en duda algunos de los resultados obtenidos, como el referente a las islas; por el contrario, un optimista (como yo) saca sencillamente la conclusión de que todas las influencias, aparte de la del relieve, parecen ser completamente independientes de la superficie. (En efecto, el producto de un multiplicando aleatorio hiperbólico por un multiplicador casi completamente arbitrario resulta ser también hiperbólico).

Es de esperar, de todas formas, que algunos matemáticos se interesen algún día por la estructura de los fondos, aunque sólo sea para el caso browniano  $H = 0,5$ .

#### *Modelo fractal de las orillas de una cuenca fluvial*

Gran parte de lo que se dijo en el Capítulo 2 acerca de las costas oceánicas se aplica también a las orillas de un río. Sin embargo, la analogía sólo puede ser aproximada. En efecto, habíamos sustituido la instantánea de una costa, que varía con el viento y las mareas, por la curva de nivel cero, que está completamente definida por el relieve. No se puede hacer nada parecido con la orilla de un río; ésta no sólo es función del relieve, sino también de la porosidad del suelo, y de la lluvia y el buen tiempo, no sólo en el instante de la observación, sino a lo largo de todo un período de tiempo muy difícil de determinar. Sin embargo, a pesar de esta cruel falta de permanencia, los sistemas fluviales, al igual que los lagos, resultan tener algunos aspectos muy sistemáticos; ¿no podría ser que, exactamente

igual que la distribución de las superficies de los lagos imita la de los fondos del relieve, el sistema fluvial imite los caminos que sigue el agua sobre un terreno lo máximo de accidentado posible, exactamente después de un chaparrón? Creo que las cosas son efectivamente así, pero mi razonamiento no puede desarrollarse aquí. Contentémonos con esbozar (Figura 134) la más simple de dichas corrientes.

LÁMINA 124. *Vuelo browniano fraccionario muy persistente*

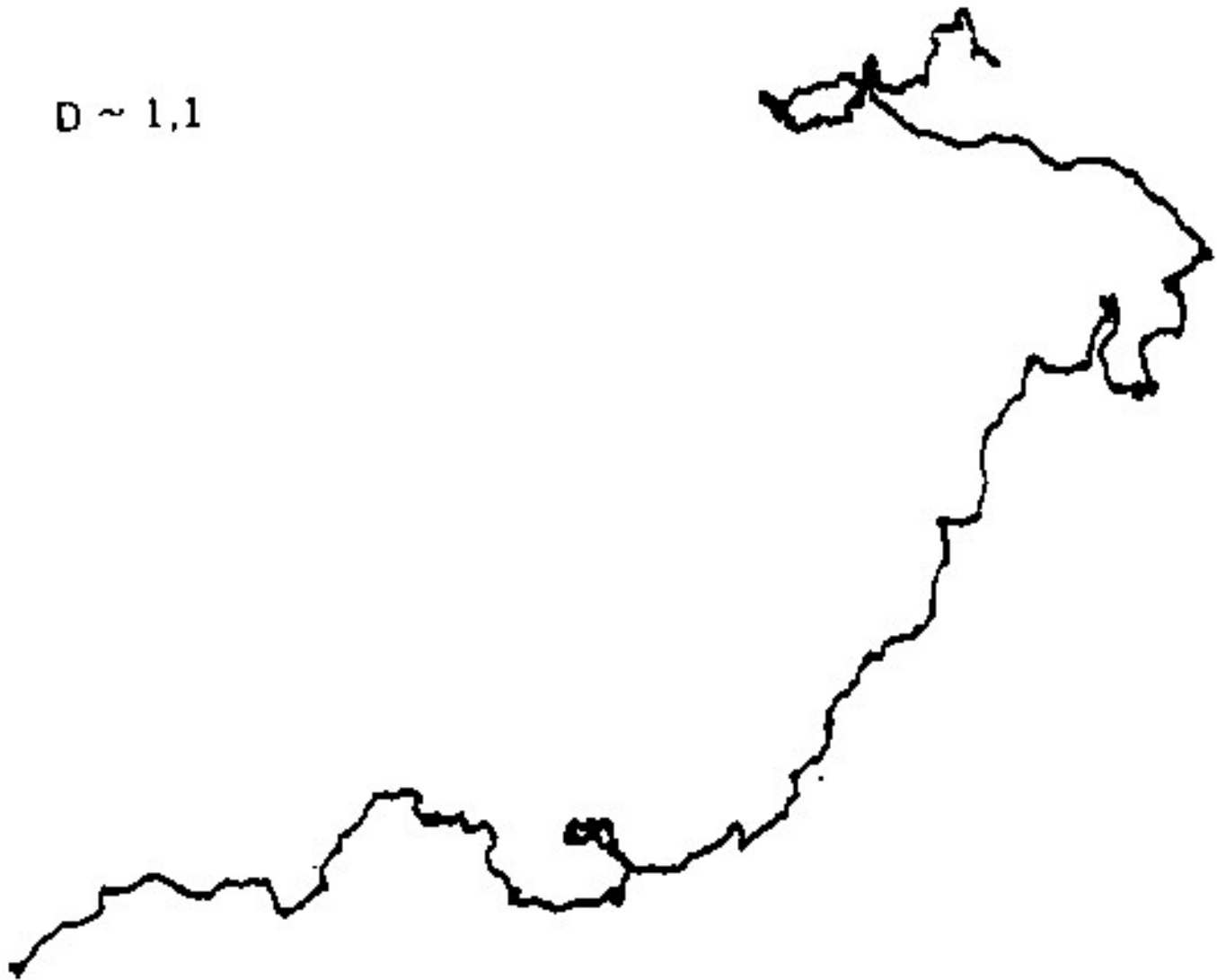


FIGURA 124

Este dibujo constituye un ejemplo de curva fractal, con homotecia estadística interna, cuya dimensión es  $D = 1/0,9 = 1,1$ , y en la que la tendencia a la formación de bucles —sin estar prohibida— está muy amortiguada, al haberle impuesto un grado de persistencia muy alto. En esta figura, y en las siguientes, los distintos grados de persistencia son mucho más aparentes que lo que habrían sido en gráficas que representaran la variación de las coordenadas escalares en función del tiempo. Si uno considera estas curvas como el resultado de superponer convoluciones grandes, medianas y pequeñas, en el caso que nos

ocupa la intensidad de las últimas es tan débil que son apenas visibles.

LÁMINA 125. *Vuelo browniano fraccionario medianamente persistente*

$D \sim 1,43$

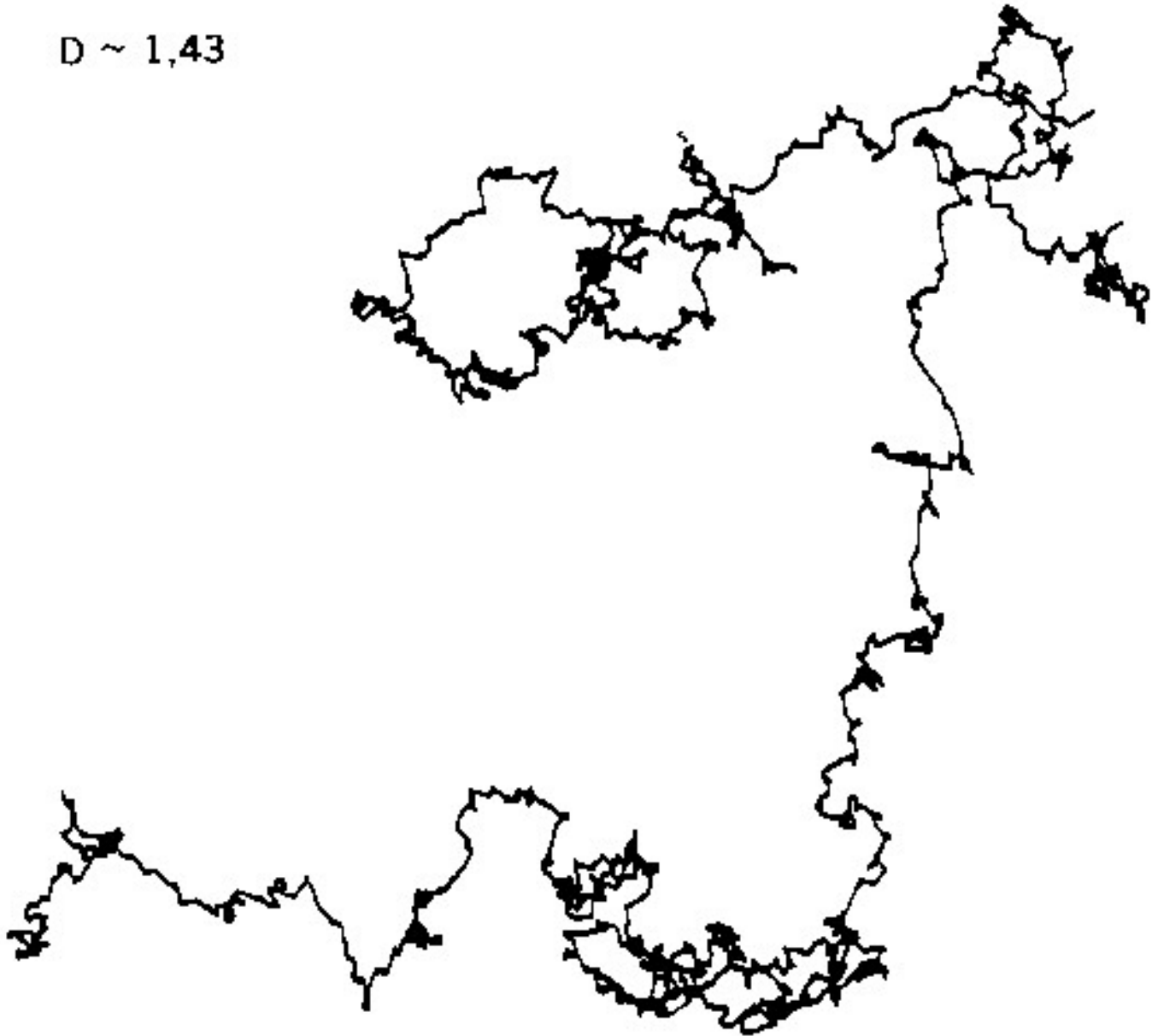


FIGURA 125

Partiendo de la figura anterior y sin cambiar la semilla del simulador pseudoaleatorio, hemos aumentado la dimensión hasta  $D = 1/0,7 = 1,43$ . Esto equivale a decir que, sin cambiar ninguna de las distintas convoluciones, hemos aumentado la importancia relativa de las pequeñas y (en menor grado) de las medianas. Por esta razón, la tendencia a la formación de pequeños bucles está menos amortiguada, y resultan mucho más manifiestos. Sin embargo, la forma general subyacente se reconoce aún sin dificultad.

LÁMINA 126. *Vuelo browniano fraccionario apenas persistente (próximo a un vuelo browniano)*

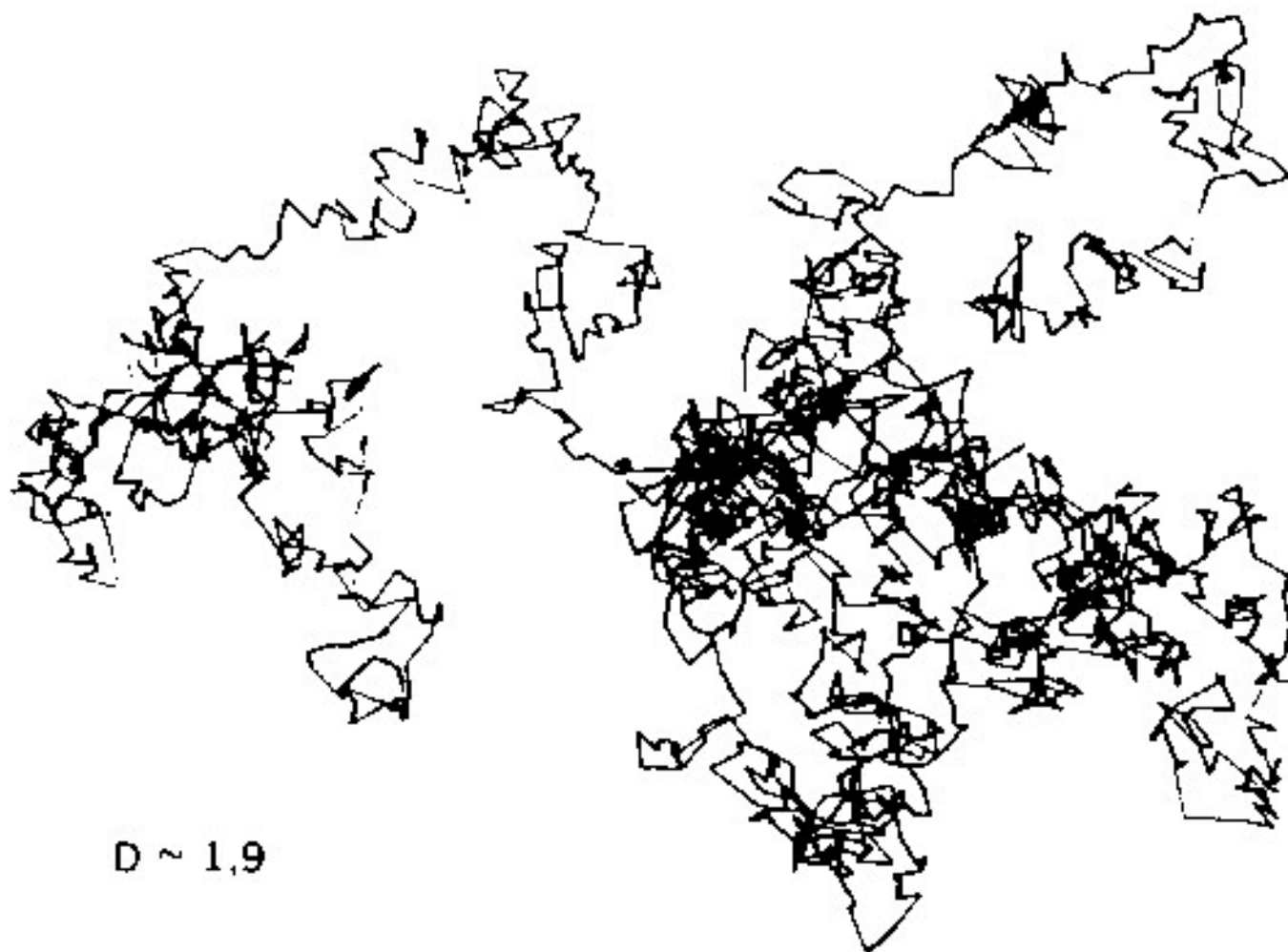
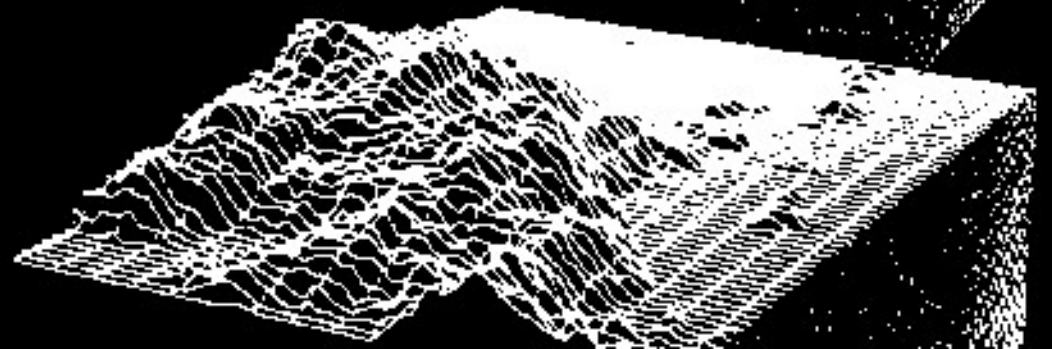
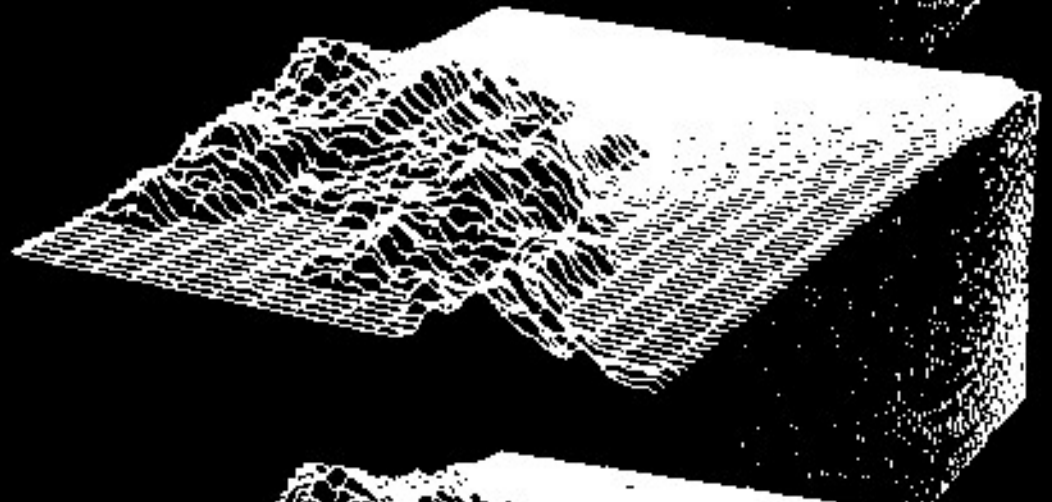
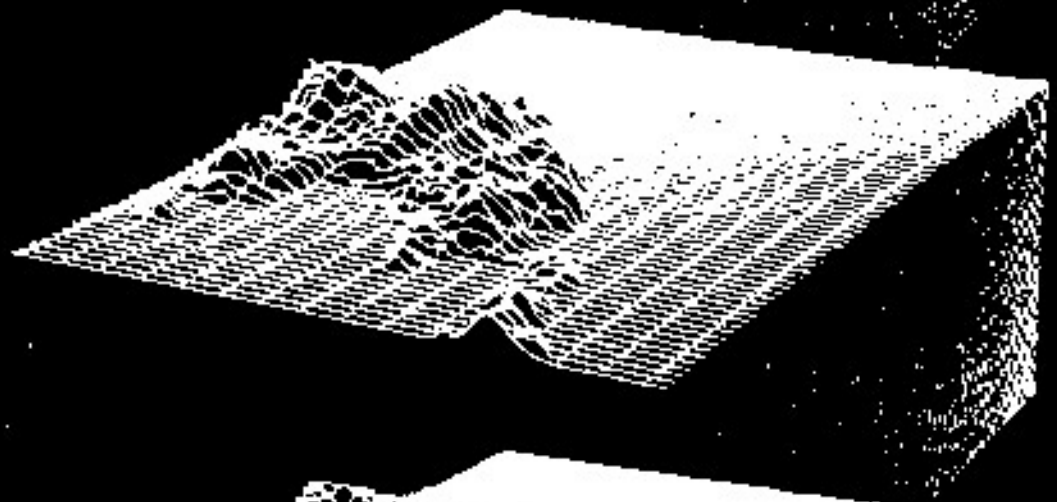
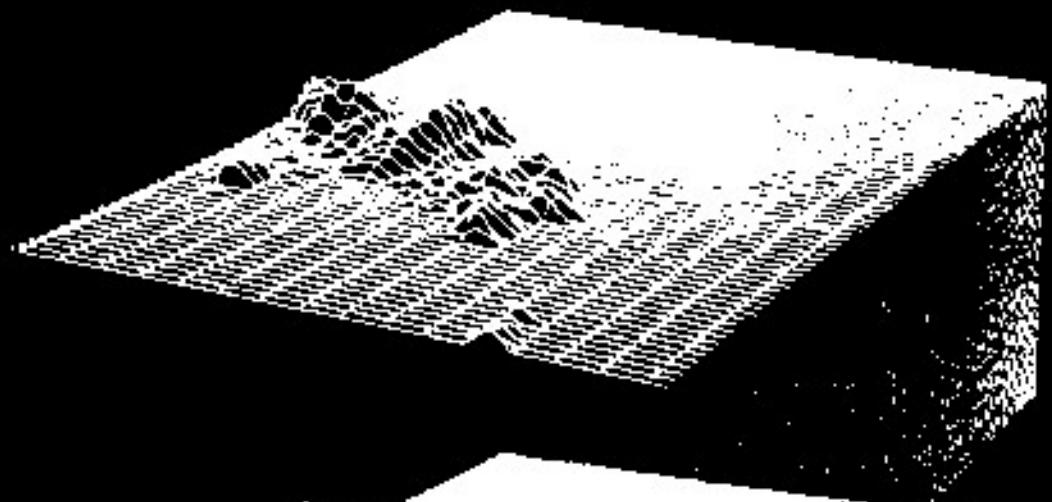


FIGURA 126

Aquí, siempre con la misma semilla, la dimensión se ha aumentado hasta  $D = 1/0,53$ , un poco menos de 1,9: se nota la proximidad del límite  $D = 2$ , que como ya sabemos corresponde al movimiento browniano normal. En el límite  $D = 2$ , se obtendría un modelo matemático del proceso físico de la Figura 57, donde las distintas convoluciones que se le añaden tienen todas la misma importancia relativa («espectro blanco»), por lo menos en media, puesto que el detalle cambia a menudo la muestra considerada. Por ejemplo, la «deriva» de baja frecuencia que dominaba las figuras en el caso de  $D$  próximo a 1, tiene una intensidad muy variable cuando  $D$  se aproxima mucho a dos; con la semilla utilizada aquí, la deriva es casi invisible; pero no ocurre lo mismo con otras semillas. Por ejemplo, podría ser que, hasta para  $D$  cercano a 1 la deriva sea mucho más fuerte que en la Figura 57; en este caso, sigue siendo manifiesta cuando  $D$  se acerca a 2.

LÁMINA 128. *Vistas de un continente imaginario*



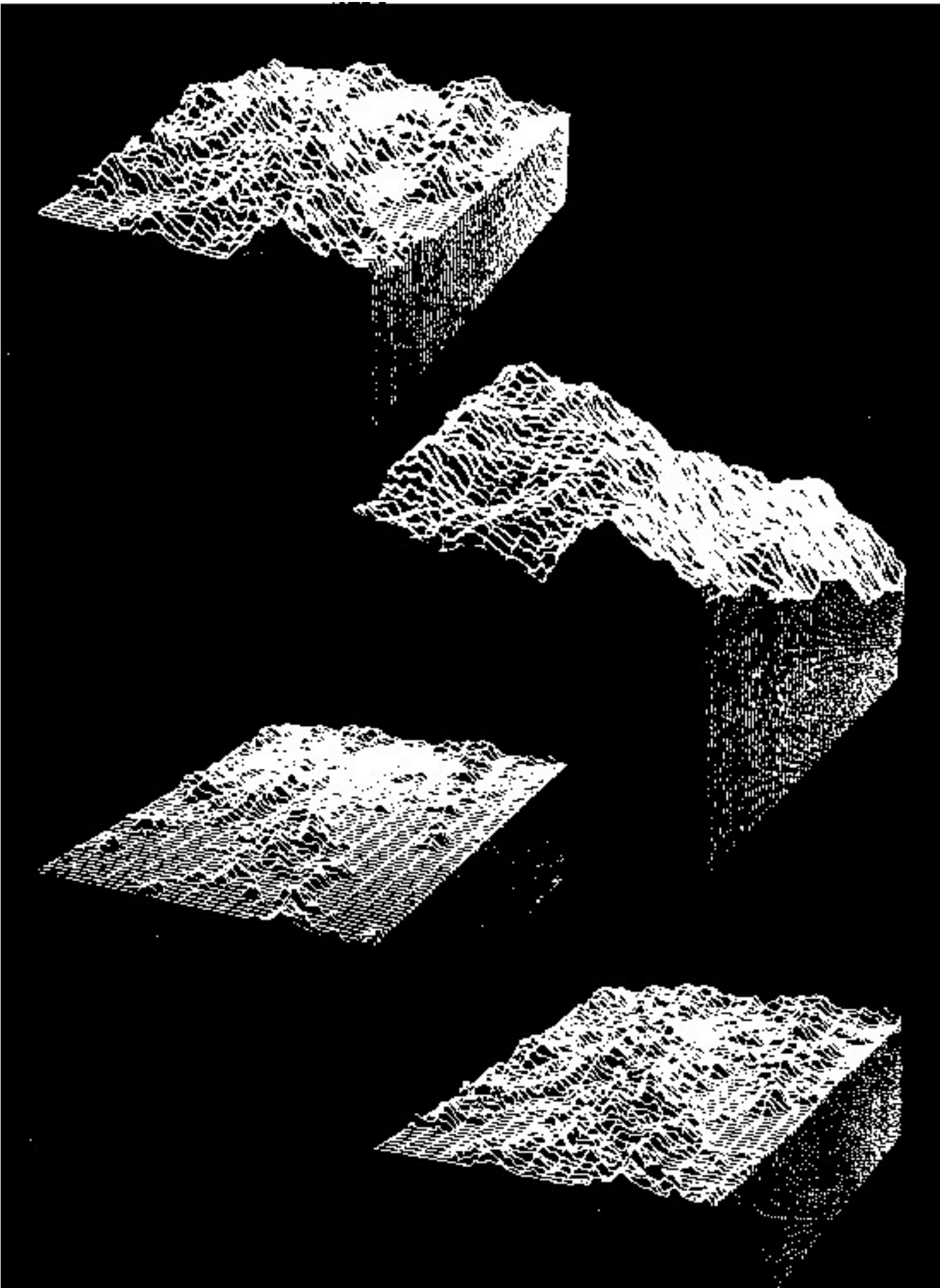
## FIGURA 128

Yo estaba buscando un modelo de la forma de las costas naturales, y era de esperar que al mismo tiempo serviría para representar el relieve terrestre y también la distribución de las superficies de las proyecciones de las islas sobre la esfera terrestre. Con este objeto, propuse una familia de procesos estocásticos que generan superficies aleatorias; dicha familia depende de un parámetro que se puede escoger arbitrariamente y que no es otra cosa que una dimensión fractal. Esta figura presenta diversos aspectos de una muestra característica, realizada con el ordenador, para la que se ha elegido el parámetro de modo que la dimensión de las costas, así como la de los cortes meridianos, sea  $D = 1,3$ . Se deduce de ahí que la dimensión de la superficie sea en total 2,3, de donde se tiene que la verdadera superficie de la isla es infinita, aunque su superficie proyectiva sea finita y positiva.

Para evaluar el grado de realismo del modelo en cuestión, he llevado a cabo distintas pruebas estadísticas «cuantitativas». Todas ellas han sido «positivas», pero en mi opinión esto no es lo más importante, pues la calidad de un modelo científico nunca es, en última instancia, una cuestión de estadística. En efecto, cualquier prueba estadística se limita a un pequeño aspecto de un fenómeno, mientras que lo que se pretende de un modelo es que represente una multiplicidad de aspectos, de los que difícilmente se podría adelantar una lista medio razonable. Para un geómetra, la mejor prueba es, en última instancia, la sensación que el ojo transmite al cerebro. Las gráficas dibujadas con el ordenador son una herramienta insuperable para este fin.

En la Figura 128 se ven diversas vistas de «mi isla» que corresponden a distintos niveles del océano (el procedimiento gráfico empleado sólo es útil bajo esta forma); creo que todas tienen un cierto aire realista, y hasta empiezo a preguntarme en qué lugar, o en qué película de un viaje, he visto otra vez la última de las vistas, con unos islotes como éstos al final de una península como la de la gráfica. Para colmo de suerte, el procedimiento gráfico elegido hace que, en el horizonte, el océano dé la impresión de espejear.

LÁMINA 130. *Vistas de continentes imaginarios*



### FIGURA 130

Para ver si el ojo es tan sensible como digo a la dimensión  $D$  de las costas, repitamos el mismo test visual de la Figura 128 con «islas» fractales de otras dimensiones, pero construidas con la misma semilla de generador pseudoaleatorio. En relación a la isla de la Figura 128, se observan diferencias considerables en la importancia relativa de las convoluciones grandes, medianas y pequeñas.

El valor browniano  $D = 1,5$  se halla ilustrado arriba a la izquierda.

Cuando  $D$  es demasiado próximo a 1, arriba a la derecha, los contornos de las islas son demasiado regulares, y el relieve presenta demasiadas caras planas inclinadas. Cuando  $D$  se acerca demasiado a 2, abajo, para dos niveles diferentes del Océano, los contornos de las islas son demasiado tortuosos, el relieve tiene demasiados picos y abismos al considerarlo en detalle, y es demasiado plano en su conjunto. (Cuando  $D$  tiende hacia 2, la costa tiende a llenar todo el plano).

No obstante, hasta las islas que corresponden a  $D > 1,3$  y  $D < 1,3$  nos hacen pensar en algo real; queda pues claro que la dimensión fractal del relieve no es la misma en todas partes; pero rara vez es menor que 1,1 o mayor que 1,5.

*P.S.* El valor  $D = 1,3$  invocado por las Figuras de la 128 a la 132, se obtuvo comparando imágenes que carecían de detalle —debido a la imperfección de los medios gráficos de 1974—. Posteriormente, la mejora de los grafismos ha conducido a disminuir el valor de  $D$ , cosa muy afortunada, pues la Figura 41 sugería valores menores que 1,3.

*P.P.S.* Voss 1985 describe y compara diversos métodos de síntesis gráfica de paisajes fractales.

LÁMINAS 131 y 132. *Costas imaginarias*

$D = 1,1$

$D = 1,3$

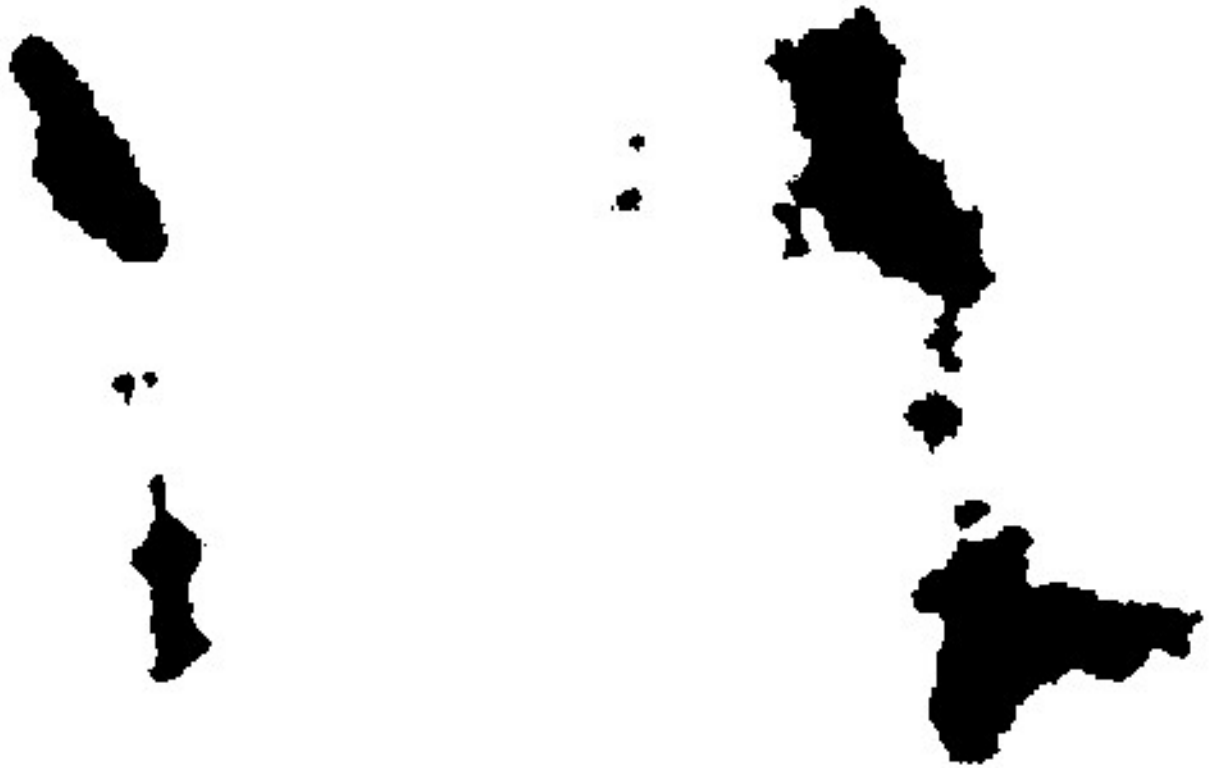


FIGURA 131

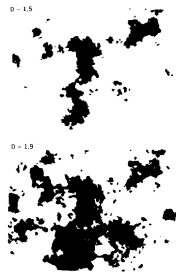


FIGURA 132

Las indicaciones de los relieves anteriores se confirman al mirar los siguientes mapas de costas (dibujados por medio de otro programa de ordenador). Cuando  $D$  tiende a 2, la costa tiende a llenar todo el plano, como la curva de Peano. Cuando  $D$  tiende a 1, la costa se hace demasiado regular para ser útil en geografía. Por el contrario, para  $D$  próximo a 1,3, es difícil examinar estas curvas artificiales sin tener la sensación de que se está mirando un atlas: la isla superior recuerda Groenlandia; dándole un cuarto de vuelta (de modo que los números de las páginas queden a la derecha), la isla de la izquierda nos recuerda África; dándole media vuelta, el conjunto nos recuerda Nueva Zelanda, con la isla Bounty incluida. Sucede lo mismo con cualquier otra semilla de generador, en tanto  $D$  permanezca cerca de 1,3; si  $D$  aumenta hasta 1,5, el juego se hace menos cómodo; cuando  $D$  aumenta más aún, el juego resulta mucho más difícil, y hasta imposible.

LÁMINA 134. *Red de drenaje fluvial separada casi por doquier. Curva de Peano de las orillas de las orillas*

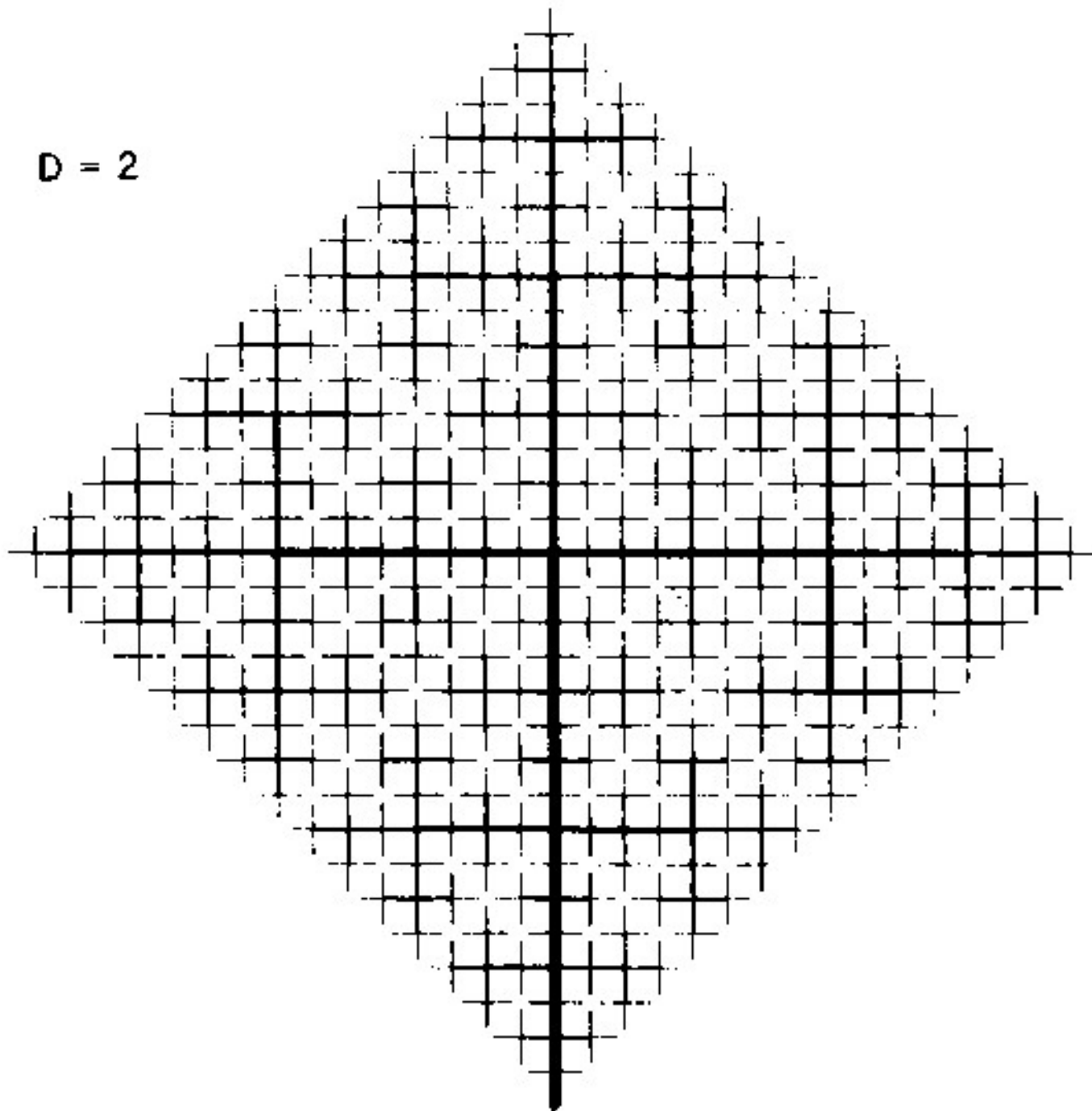


FIGURA 134

Es interesante considerar aquí otra vez el límite para  $\varepsilon \rightarrow 0$  de la Figura 47, y darle una interpretación de un tipo completamente distinto. Convengamos en decir que un relieve

terrestre impermeable está perfectamente drenado a través de su frontera si ocurre que una gota de agua que caiga sobre él acaba siempre por alcanzar un punto de dicha frontera. Habrá puntos tales que, si dos gotas de agua caen al azar en su entorno, sus trayectorias se alejan inmediatamente la una de la otra, por lo menos temporalmente; estos puntos se llamarán de separación. Por ejemplo, un cono perfecto tiene un punto de separación, su vértice, mientras que una pirámide cuadrangular tiene cuatro rectas de separación. Los conos y las pirámides son objetos geométricos clásicos, muy regulares, mientras que nosotros estamos suponiendo que el relieve terrestre es fractal. Resulta, como vamos a demostrar dentro de poco, que los puntos de separación de un relieve natural pueden ser densos por doquier, y corresponder, por lo tanto, a una red de drenaje separada casi por doquier. Al pretender sólo demostrar una posibilidad y no intentar describir el propio relieve, nuestra ilustración se puede tomar la libertad de ser esquemática.

La cuenca será el interior de un cuadro, con los vértices orientados según los puntos cardinales. Las diagonales forman un curso de agua cruciforme, cuya rama principal alcanza el punto S, partiendo de muy cerca del punto N, y cuyas ramas laterales parten de muy cerca de los puntos E y O y desembocan en el centro; cada una de estas cuatro ramas drena un cuarto de la cuenca. En una segunda etapa, se hace una cruz en cada rama; en este estadio, la red consta de 16 secciones de curso de agua, cada una de las cuales tiene una longitud de  $1/4$  de la diagonal de la cuenca, y drena  $1/16$  de su superficie. Las fuentes de las ocho sub-ramas coinciden dos a dos (conviene excluirlas de la red, pues de lo contrario ésta tendría puntos dobles). Si se continúa indefinidamente la construcción iniciada ahí arriba, la longitud total de las orillas de todas las ramas habrá aumentado sin fin; el número total de las fuentes —que son puntos dobles (excluidos de la red)— será también infinito, y nuestra red se habrá acercado tanto como queramos a cualquier punto de la cuenca. Si se detiene la construcción después de un número finito de etapas, los afluentes se pueden clasificar en orden creciente, y se constata que su tendencia a la ramificación satisface una regla conocida por los especialistas, debida a Horton.

*P.S.* Las orillas del río y sus afluentes se unen en una curva que reúne dos puntos situados uno frente al otro en la desembocadura del río. Es una curva de Peano distinta de la curva de la Figura 49. Y recíprocamente, he hecho notar que cualquier curva de Peano puede ser interpretada como la orilla acumulada de un río.

¡Un monstruo ideado en 1890 fue domado en 1975!

## Capítulo 8

### La geometría de la turbulencia

Volvamos ahora nuestra atención a otro gran problema clásico, muy vasto y mal explorado, del que sólo abordaremos los aspectos que hagan intervenir los objetos fractales y la noción de dimensión. Aun desde este punto de vista, el desarrollo no tendrá la amplitud que merece su importancia práctica y conceptual; nos limitaremos a algunas cuestiones que tienen el mérito de introducir temas nuevos de interés general, siendo el propio tema tratado en concreto en Mandelbrot 1967b, 1967k, 1972j, 1974d, 1974f, 1975f, 1976c, 1976o, y 1977b.

El estudio de la turbulencia tiene claramente cabida en un ensayo dedicado hasta el momento a la forma de la superficie terrestre, a la distribución de los errores extraños y a la de los objetos celestes. Ya desde 1950, von Weizsäcker y otros físicos habían barajado la posibilidad de explicar la génesis de las galaxias por un fenómeno turbulento a escala cósmica; sin embargo, la idea no pudo arraigar. Si vale la pena volver a pensar en ella en serio, es porque el estudio de las galaxias ha progresado, porque la teoría de la turbulencia se está metamorfoseando, y porque estoy en condiciones de proporcionar la base geométrica fractal que le hacía falta. Los trabajos de 1950 se referían, efectivamente, a la turbulencia homogénea, tal como fue descrita por Kolmogorov, Obukhov, Onsager y Weizsäcker, entre 1940 y 1948.

Era necesaria una audacia extrema para pretender explicar así un fenómeno sumamente intermitente —como las galaxias— mediante un mecanismo de turbulencia homogénea. Lo que ha variado desde entonces es que se ha reconocido universalmente que la turbulencia homogénea es una quimera, una aproximación cuya utilidad es menor de lo que se había pensado en un principio. Hoy se reconoce que una de las características de la turbulencia reside en su carácter violentamente «intermitente». Como todo el mundo sabe, el viento no sólo sopla siempre a ráfagas, sino que lo mismo ocurre a otras escalas. Así pues, he reanudado el esfuerzo unificador de von Weizsäcker buscando una relación entre dos intermitencias. La herramienta que propongo son, claro está, las fractales.

Su utilización para abordar la geometría de la turbulencia es inédita, pero es natural desde el punto de vista histórico, sobre todo si se tiene en cuenta el nexo entre los conceptos de fractal y de homotecia interna. En efecto, una variante algo vaga de la homotecia había sido concebida, precisamente con motivo de una teoría de la turbulencia, ni más ni menos que por nuestro Lewis Fry Richardson. Y una forma analítica de homotecia ha tenido sus primeros éxitos en la aplicación a la turbulencia de la mano de Kolmogorov y de Obukhov y Onsager. Como todo fluido viscoso, la corriente turbulenta en un fluido está caracterizada por una medida intrínseca de escala, el número de Reynolds, y los problemas de intermitencia son especialmente agudos cuando dicho número es muy grande, como ocurre sobre todo en los casos del océano y la atmósfera.

Sin embargo, el problema de la estructura geométrica del soporte de la turbulencia no se ha planteado hasta muy recientemente. En efecto, la imagen que uno se hace de este fenómeno sigue en general «congelada» en los términos en los que fue descrito por vez primera, hará unos cien años, por Boussinesq y Reynolds. El modelo consistió durante todo este tiempo en el flujo dentro de un tubo: cuando la presión corriente arriba es

suficientemente débil, todo es regular y «laminar», cuando la presión es suficientemente grande, todo se hace, muy rápidamente, irregular y turbulento. En este caso prototípico, el soporte de la turbulencia es, por consiguiente, o «vacío», en el sentido de inexistente, o bien llena el tubo por completo, y ni en uno ni en otro caso hay razones para plantearse dudas al respecto. En un segundo caso, el de la estela que deja tras de sí un barco, por ejemplo, las cosas se complican: entre la estela, que es turbulenta, y el mar ambiente, que se supone laminar, hay una frontera; pero, aunque ésta sea muy irregular, es tan clara, que normalmente no parece razonable estudiarla independientemente, ni tampoco verdaderamente necesario tratar de definir la turbulencia mediante un criterio «objetivo». En un tercer caso, el de la turbulencia plenamente desarrollada en los fuelles de un órgano, las cosas son más sencillas aún, puesto que toda estructura de este tipo ya parece de por sí turbulenta —concepto siempre mal definido también—. Sin embargo, la manera de llegar a ello es un tanto curiosa (si hay que creer algunas leyendas tenaces). Se dice (espero que sólo sean murmuraciones) que cualquier fuelle de órgano es, por principio, inadecuado para el estudio de la turbulencia; espontáneamente, en vez de llenar todo el volumen que se le ofrece, la propia turbulencia parece «turbulenta», presentándose en bocanadas irregulares; sólo gracias a esfuerzos de redistribución gradual, se llega a estabilizar el conjunto, a la manera del tubo de Boussinesq-Reynolds.

Por este motivo, y sin poner en cuestión la importancia práctica de los tubos, soy de los que no se quedan tranquilos. ¿Es la «turbulencia de laboratorio» típica de la «turbulencia natural», y el fenómeno «turbulencia» es único? (aun sin tener en cuenta sus dos aspectos verdaderamente distintos, a saber, turbulento por oposición a laminar, y turbulento-disipativo en contraste con turbulento no disipativo). Para saberlo, habría que definir primero los términos, trabajo que parece como si nadie quisiera afrontar.

Propongo que se aborde esta definición indirectamente, invirtiendo el procedimiento habitual: partiendo de un concepto mal especificado de lo que es turbulento, intentaré primero establecer que la turbulencia natural muy avanzada, o su disipación, están «concentradas en», o «sostenidas por», conjuntos espaciales cuya dimensión es una fracción, del orden de magnitud  $D = 2,5$ . A renglón seguido, me aventuraré a proponer que se defina como turbulento a todo flujo cuyo soporte tenga una dimensión comprendida entre 2 y 3.

*¿Cómo distinguir lo turbulento de lo laminar en la atmósfera?*

Las corrientes en el seno de los fluidos son fenómenos multidimensionales, donde las tres componentes de la velocidad son funciones de las tres coordenadas espaciales y del tiempo, pero el estudio empírico ha de pasar, por el momento, por uno o varios «cortes» unidimensionales, constituyendo cada una de éstos la crónica de una de las componentes de la velocidad en un punto fijo. Para hacernos una idea intuitiva de la estructura del corte para una masa atmosférica desplazándose ante el instrumento, invirtamos los papeles y tomemos como «instrumento» un avión. Un avión muy grande sirve para ilustrar un nivel muy grosero del análisis; algunos rincones de la atmósfera parecen turbulentos con toda evidencia, y en ellos el avión es sacudido; en contraste, el resto parece laminar. Pero repetamos la prueba con un avión más pequeño: por una parte, éste «siente» arranques turbulentos allí donde el grande no los había sentido, y por otra, descompone cada sacudida del mayor en una ráfaga de sacudidas más débiles. Así pues, si un pedazo turbulento del corte se examina en detalle, puede observarse que presenta inserciones laminares, y así

sucesivamente a medida que el análisis se va refinando.

Hablando de la configuración espacial, von Neumann 1949 observa que la turbulencia se concentra sin lugar a dudas «en un número asintóticamente creciente de choques cada vez más débiles». En nuestros cortes unidimensionales, cada choque aparecerá como un punto. Las distancias entre choques están limitadas por una escala interna no nula  $\eta$ , que depende de la viscosidad, pero que, a fin de facilitar la conceptualización, conviene imaginar como  $\eta = 0$ . Propongo que se añada a esto la idea de que los choques están infinitamente hojaldrados. De este modo se manifiesta, en nuestros cortes unidimensionales, el tipo de estructura cantoriana con la que ya nos hemos familiarizado, desde que apareció en el Capítulo 4 al tratar de los errores extraños. La diferencia estriba en lo siguiente: en los intervalos entre errores no había nada, mientras que en las intermisiones laminares, el flujo no se detiene, sino que simplemente se vuelve más regular que en otros lugares. Pero resulta evidente que hasta esta diferencia desaparecería si se considerara, además de los errores, el ruido físico que los produce. Esto sugiere que para construir un modelo de la turbulencia o del ruido hay que proceder por dos aproximaciones sucesivas. La primera supondrá que el flujo laminar es tan regular que es prácticamente uniforme, y por lo tanto despreciable, conduciéndonos de este modo al esquema cantoriano de dimensión menor que 3; la segunda aproximación supondrá que cualquier cubo del espacio contiene por lo menos algo de turbulencia. En estas condiciones, si no se tiene en cuenta la turbulencia allí donde su intensidad sea muy débil, uno espera reencontrar, poco más o menos, la primera aproximación. Remitamos pues esta segunda aproximación al Capítulo 9 y ocupémonos aquí de la primera.

Parece razonable exigir que las intersecciones del conjunto de turbulencia con una recta cualquiera tengan la estructura cantoriana que tenía el conjunto empleado para representar los errores extraños. Hemos de idear, pues, conjuntos que tengan intersecciones como ésas.

#### *La cascada de Novikov-Stewart*

El estudio de la intermitencia de la turbulencia fue estimulado por Kolmogorov 1962 y Obukhov 1962, pero el primer modelo explícito fue el de Novikov y Stewart 1964. Dicho modelo descubre otra vez, independientemente, el principio de las cascadas de Fournier y de Hoyle, y, por lo tanto, vuelve a descubrir —sin saberlo— el camino trazado por Cantor. Si lo hubieran sabido, quizá nuestros autores se hubieran llevado un buen susto. Afortunadamente, yo me he dado cuenta de ello, y eso me ha llevado a desarrollos muy prometedores.

La idea es que el soporte de la turbulencia es engendrado por una cascada, de la que cada etapa parte de un remolino y da como resultado  $N$  sub-remolinos de un tamaño  $r$  veces menor, en cuyo seno se concentra la disipación. Está claro con ello que  $D = \log N / \log(1/r)$ .

Esta dimensión  $D$  puede estimarse empíricamente, pero hasta hoy nadie ha afirmado seriamente haberla deducido de consideraciones físicas fundamentales. Al contrario, en el caso de la astronomía, Fournier y Hoyle encuentran razones para esperar que  $D = 1$ . Se sabe (págs. 100-101) que esto contradice el resultado empírico, pero parece que incluso una teoría falsa puede ser psicológicamente tranquilizadora.

Segunda novedad: en astronomía,  $D < 2$ , pero en turbulencia se ha de suponer  $N$  mucho mayor que  $1/r$ , y la dimensión es de aproximadamente 2,5. De hecho, uno de los triunfos de las visiones fractales del universo y de la turbulencia habrá consistido en

demostrar la necesidad de  $D < 2$  en el primer caso, y  $D > 2$  en el segundo, a partir del mismo hecho geométrico. En efecto, para evitar lo que se llamó «el cielo en llamas», en el Capítulo 6 era necesario que, al dirigir la mirada al azar, no se encontrara, con seguridad casi absoluta, ninguna fuente de luz, lo que implicaba que  $D < 2$ . Por el contrario, a fin de explicar el hecho de que la turbulencia está muy esparcida, es necesario en este caso que un corte hecho al azar tenga una probabilidad no nula de intersectar el soporte de la turbulencia, lo que implica que  $D > 2$ .

*Comportamiento de la dimensión fractal frente a las intersecciones. Construcción de Cantor a varias dimensiones*

La cascada de Novikov y Stewart es importante, pero conviene dar un paso atrás, como ya hemos hecho varias veces, y estudiar en detalle algunas construcciones no aleatorias cuya regularidad es excesiva, y en las que hay un punto central que juega un papel demasiado especial. La generalización de la construcción de Cantor se puede hacer de varias maneras, que conducen a resultados muy distintos. Tenemos un ejemplo en la «esponja fractal de Sierpinski-Menger» ilustrado en la Figura 145. En un segundo ejemplo, el mordisco con que se empieza el proceso es el veintisieteavo central, definido como un cubito concéntrico con el primero y de lado  $1/3$ . A continuación se hace lo mismo con cada uno de los 26 cubitos que quedan, luego con los sub-cubos restantes, etc.

Lo que queda, si se sigue la construcción indefinidamente, es una especie de pedazo de Emmenthal evanescente. Se puede imaginar la forma que tendrían sus lonchas a partir de las que hemos entrevisto cuando describíamos el conjunto que quedaba fuera de los cráteres de la Luna, visto según la óptica de un pintor cubista. El volumen del objeto es nulo y está lleno de agujeros cuadrados de todos los tamaños, separados por tabiques infinitamente hojaldrados. Se comprueba fácilmente que tiene homotecia interna, y que su dimensión es igual a  $\log 26 / \log 3$ . Podemos proponer una generalización inmediata: en lugar de sacar cada vez el veintisieteavo central, podemos sacar el cubo central de arista  $1 - 2r$ ; la dimensión se convierte entonces en

$$3 + \log [1 - (1 - 2r)^3] / \log(1/r),$$

cuyo valor siempre es mayor que 2, pero se acerca más a este valor cuanto mayor es  $1/r$ . La desigualdad  $D - 2 > 0$  concuerda con la intuición de que nuestras «pastelerías» fractales son «más gruesas» que cualquier superficie ordinaria de dimensión 2.

Según un tercer método y en el caso triádico, los mordiscos son mayores. El primero de ellos deja en las esquinas del cubo inicial 8 cubitos de lado  $1/3$ , continuándose la construcción de manera natural. Al final se tiene también un polvo de puntos inconexos. Sin embargo, la dimensión es igual a  $\log 8 / \log 3$ , que es menor que dos y mayor que uno. Desde el punto de vista geométrico, el polvo que se obtiene de esta manera es, sencillamente, el producto de tres polvos triádicos de Cantor unidimensionales (exactamente igual que un cuadrado es el producto de sus lados). Cambiemos ahora el método, de manera que los 8 cubitos que se dejan en cada etapa tengan una arista de longitud arbitraria  $r$ , con la única condición de que sea menor que  $1/2$ . Al final se tiene siempre un polvo de puntos de dimensión idéntica a  $\log 8 / \log(1/r)$ , cantidad que es arbitraria, salvo en la limitación de que ha de ser menor que 3. Concuerda con la intuición el hecho de que un conjunto más rico que un polvo tenga una dimensión mayor que 0, pero es contrario a ella que un conjunto «menos conexo» que una línea tenga una dimensión

mayor que 1. Pero este resultado no hace más que confirmar lo que ya sabemos desde que hemos estudiado los objetos celestes (construcción de Fournier-Charlier), a saber, que no hay ninguna relación entre conectividad y dimensión fraccionaria. Observemos no obstante, que, para obtener un polvo de dimensión mayor que 1, hemos recurrido a mordiscos cuya forma es sumamente especial. En ausencia de una ligadura geométrica como la que teníamos en el caso anterior, por ejemplo en el caso de construcciones regidas por el azar, es de esperar que se puedan entrever relaciones entre la dimensión y la conectividad. El problema queda pendiente.

Recordemos que también el universo de Fournier-Charlier puede ser considerado como una variante espacial de la construcción de Cantor.

#### *Conjuntos cantorianos espaciales estadísticos*

La primera motivación para introducir formas estadísticas del polvo de Cantor está relacionada, como en los capítulos precedentes, con la búsqueda de un modelo más irregular, con la esperanza de que sus propiedades sean más realistas. Una nueva motivación procede del deseo de encontrar la relación entre conectividad y dimensión, uno de cuyos aspectos hemos discutido en la sección anterior. Sin más ambages, consideremos mordiscos completamente aleatorios y tridimensionales, generalizando de este modo el método que hemos empleado ya a propósito de los errores extraños y los cráteres circulares de la Luna. Lo más natural es determinar que los mordiscos sean bolas abiertas, esto es, interiores de esferas, siendo el valor esperado para el número de mordiscos con volumen superior a  $u$  igual a  $K(3 - D)/u^3$ . La forma  $K(3 - D)$  para la constante del numerador se ha elegido de tal manera que el criterio buscado dependa de  $D$ : cuando la constante sea mayor que  $3K$ , el conjunto que queda es casi con toda seguridad vacío (y  $D$ , que es negativo, no es una dimensión), mientras que para  $D > 0$ , el conjunto residual tiene una probabilidad no nula de ser no vacío, y en este caso, tiene una forma de homotecia interna de dimensión  $D$ . En particular, el volumen del conjunto que queda es siempre nulo; más concretamente, es casi seguro que una esfera de radio  $R$ , cuyo centro se haya escogido al azar, no interseccionará al conjunto residual. Por consiguiente, es necesario tomar precauciones para evitar esta degeneración (¡no hay que olvidar la forma condicional del principio cosmográfico!); sabemos que una buena manera de hacerlo consiste en estudiar la geometría de este conjunto a partir de un origen que forme también parte del mismo.

He aquí lo que se obtiene: cuando  $D$  está cerca de 3, los mordiscos dejan un conjunto formado por «velos infinitamente hojaldrados». Sus intersecciones con planos o con superficies esféricas tienen la forma de filamentos infinitamente bifurcados como los que encontrábamos sobre la Luna, nuestras «lonchas de Emmenthal». Sus intersecciones con rectas, o con círculos (excepto por algunos detalles), son «ráfagas de errores extraños». Para los  $D$  menores, se tienen «hilos infinitamente ramificados», pero esta vez en el espacio y no en el plano. Por lo tanto, sus intersecciones con planos o con esferas son polvos de puntos, y sus intersecciones con rectas o círculos son, casi con toda seguridad, vacías. Cuando  $D$  es pequeño, todo el conjunto residual es un polvo; sus intersecciones con los planos y las rectas son, casi con toda seguridad, vacías.

*P.S. Mordiscos espaciales y modelos de la distribución de las galaxias. El concepto de «lagunosidad de una fractal».*

La Figura 111 señala que mi primer modelo de la distribución de las galaxias da lugar a grandes vacíos y regueros, y observa que esto estaría muy bien, pero sólo con la condición de que la intensidad de estos rasgos pueda ser atenuada. Con este fin, sólo he tenido que pasar lista a los polvos descritos en el párrafo anterior. Luego, eligiendo mordiscos cuya forma no es esférica, he identificado una nueva característica de las fractales, que he denominado «lagunosidad», y que es esencial desde entonces —por ejemplo en física. Véanse los capítulos 34 y 35 de *Fractal Geometry of Nature*.

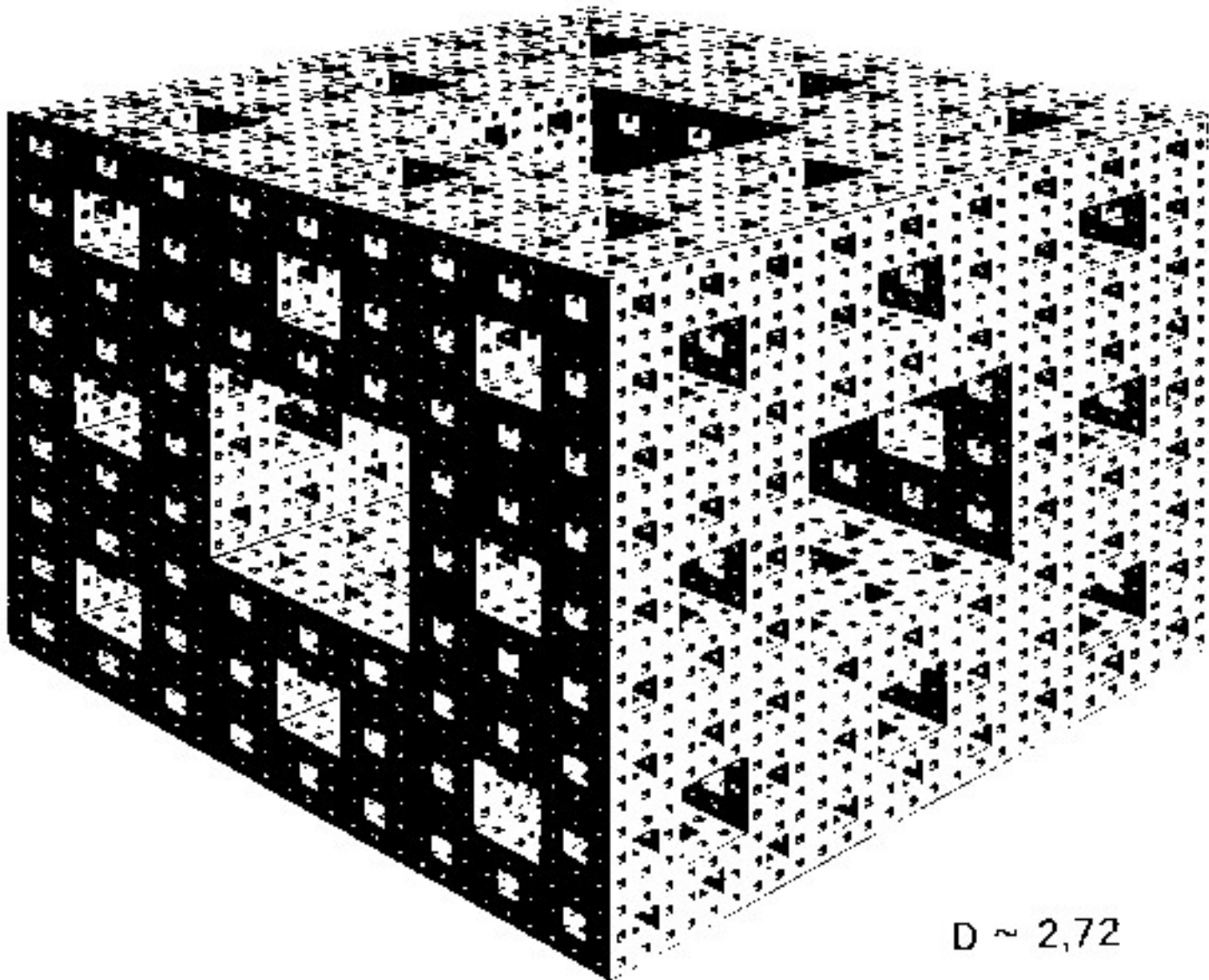
Con todo, sigue siendo cierto que no puede haber una fractal sin grandes vacíos. Por esta razón, todos aquellos que creen en las fractales se han alegrado del descubrimiento bien conocido, a finales de 1982, de vacíos intergalácticos de tamaño «absolutamente imprevisto».

*¿Son fractales las singularidades de la ecuación de Navier- Stokes? ¿Permitirá esto resolverlas por fin?*

No se ha podido establecer aún ninguna relación lógica entre la teoría de la turbulencia homogénea de Kolmogorov y las ecuaciones de Navier-Stokes, que, según se cree, gobiernan el flujo de los fluidos, incluso cuando éste es turbulento. Ésta es, sin duda, la razón que explica por qué —entre los hidrodinamistas— la validación de las previsiones de Kolmogorov ha sido más bien fuente de malestar que de alegría. Se habría podido temer que la introducción de mi noción de homogeneidad fractal acentuara este divorcio, pero estoy convencido de que va a pasar lo contrario. Éstas son mis razones: se sabe que, muy a menudo, la física matemática consigue desbrozar un problema reemplazando sus soluciones por el esqueleto formado por sus singularidades; pero ése no ha sido el caso para las soluciones turbulentas de las ecuaciones de Navier, incluso después de Kolmogorov, y en mi opinión eso es lo que más ha contribuido a retrasar el estudio. Pienso que —gracias a unas características específicas de los objetos fractales, que no podemos detenemos a describir aquí—, por lo que se refiere a la naturaleza de dichas singularidades, esta laguna está muy cerca de ser llenada.

*P.S.* Precisé estas ideas en 1976c, formulando la conjetura de que las singularidades de las ecuaciones de Navier-Stokes y de Euler son fractales. Esta conjetura parece estar en camino de confirmarse, como se dice en el Capítulo 11 de *Fractal Geometry of Nature*

LÁMINA 145. *Un queso en el espacio tridimensional: la esponja de Sierpinski-Menger*



$$D \sim 2,72$$

FIGURA 145

El principio del proceso de construcción es evidente. Si se aplica indefinidamente, se obtiene un objeto geométrico, conocido como esponja de Sierpinski-Menger, tal que cada una de sus caras exteriores, conocido como tapiz de Sierpinski, es una figura de área nula, mientras que el perímetro total de los agujeros es infinito. Obsérvese que las intersecciones del límite, con las medianas o con las diagonales del cubo inicial, son todas ellas conjuntos triádicos de Cantor. (Figura reproducida con la autorización del editor de «Studies in Geometry» de L. M. Blumenthal y K. Menger, © 1970 by W. H. Freeman and Co.).

## Capítulo 9

### Intermitencia relativa

El título del presente capítulo es más bien un concepto fractal que un dominio de aplicación. Volvemos, en efecto, a una aproximación que se ha hecho en varias de las aplicaciones. Al hablar de los errores a ráfagas, reprimíamos nuestra convicción de que entre dos errores el ruido subyacente se debilita, pero no cesa. Al discutir acerca de las distribuciones estelares, reprimíamos nuestro conocimiento de la existencia de una materia interestelar, que también puede ser que esté distribuida muy irregularmente. Y al hablar de las hojas de turbulencia, caíamos otra vez en el garlito, y tomábamos una imagen del régimen laminar en la que no pasa nada. Análogamente habríamos podido examinar la distribución de los minerales, sin introducir ninguna idea esencialmente nueva: las regiones en las que la concentración de oro o de cobre es suficientemente grande como para justificar la explotación minera están delimitadas por otras cuyo contenido en este metal se debilita, pero nunca llega a anularse. Ahora debemos llenar todos estos vacíos procurando no afectar demasiado las imágenes ya establecidas. Esbozaré ahora una manera de hacerlo, que va bien cuando el objeto y las intermisiones son de la misma naturaleza y sólo difieren en la intensidad. Para ello, me dejaré inspirar una vez más por las viejas matemáticas puras, calificadas de «inaplicables». Este capítulo será relativamente técnico y seco.

#### *Definición de los dos grados de intermitencia*

Por necesidades de contraste, nos conviene caracterizar los fenómenos que hemos considerado hasta ahora como «absolutamente intermitentes». El epíteto está motivado por el hecho de que en las intermitencias no pasa *absolutamente* nada: no hay energía de ruido, ni materia, ni disipación turbulenta. Además, todo lo que «ocurre» en un intervalo, un cuadrado o un cubo, se concentra *por entero* en una pequeña porción, que a su vez está contenida en un subconjunto al que llamamos «simple», esto es, un conjunto formado por un número finito de subintervalos, subcuadrados o subcubos, cuyas longitud, área o volumen total, se pueden hacer tan pequeños como se quiera. Yendo aún más lejos, diremos que la intermitencia es «degenerada» si todo ocurre en un solo punto. Por contraste, diremos que la intermitencia es «relativa» si no hay ningún conjunto simple en el que no pase *nada*, mientras que existe un conjunto simple en el que está contenido *casi todo* lo que pasa.

#### *Medida fractal de Besicovitch*

Permanezcamos dentro del contexto triádico original de Cantor, en el cual se divide  $[0,1]$  en tercios, éstos a su vez en tercios y así sucesivamente, y partamos de una masa distribuida sobre  $[0,1]$  con densidad uniforme e igual a 1. Borrar el tercio central divide esta masa en tres partes iguales a  $1/2$ ,  $0$  y  $1/2$ , repartidas con densidades de  $3/2$ ,  $0$  y  $3/2$ . Esto se generaliza fácilmente suponiendo que cada etapa divide la masa inicial en partes iguales, respectivamente, a  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$ , repartidas según las densidades  $3p_1$ ,  $3p_2$ , y  $3p_3$  (satisfaciéndose, claro está, que  $0 \leq p_m < 1$  y  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ ). Cuando se haya repetido este

procedimiento infinitas veces, la masa formará lo que llamaremos una medida de Besicovitch. ¿Qué podemos decir de ella? Para empezar, está claro que ningún intervalo abierto constituye una intermisión absoluta. En efecto, una tal intermisión tendría que incluir por lo menos un intervalo de longitud  $3^{-k}$ , cuyas extremidades fueran múltiplos de  $3^{-k}$ , y sabemos que cualquier intervalo de esta forma contiene una masa no nula. Sin embargo, cuando  $k$  es grande, dicha masa se hace sumamente pequeña, pues Besicovitch ha demostrado (aquí simplificamos su resultado) que casi toda la masa se concentra en  $3^{kD}$  intervalos de longitud  $3^{-k}$ , en los que se tiene:

$$D = -\sum p_m \log_3 p_m < 1$$

Cuando  $k$  aumenta, el porcentaje de intervalos no vacíos tiende a cero, mientras que la longitud total de éstos es aproximadamente igual a  $3^{k(D-1)}$ , y por lo tanto tiende también a cero. Cuando  $p_1 \rightarrow 1/2$ ,  $p_2 \rightarrow 0$ ,  $p_3 \rightarrow 1/2$ , el conjunto de Besicovitch tiende hacia un polvo de Cantor; es fácil verificar que  $D$  tiende hacia la dimensión  $\log 2/\log 3$  de este último conjunto.

Si en vez de dividir  $[0,1]$  en tercios, se divide en décimos, se obtiene el conjunto de los números reales entre 0 y 1 para los que las distintas cifras tienen las probabilidades  $p_m$ . Obsérvese que, formalmente,  $D$  es una «entropía» en el sentido de la termodinámica, o también una «información» en el sentido de Shannon (véase Billingsley 1965). Y lo que es más importante,  $D$  es una dimensión de Hausdorff-Besicovitch. Sin embargo, el conjunto de Besicovitch es abierto, mientras que todos los conjuntos estudiados anteriormente eran cerrados (la diferencia está relacionada con el contraste entre las intermitencias absoluta y relativa). Al generalizar la dimensión a conjuntos abiertos, se pierden muchas de sus propiedades, ¡entre las que hay algunas que tienen un interés práctico directo, y a las que habíamos empezado a acostumbrarnos! Por ejemplo, el exponente de homotecia del conjunto de Besicovitch no es  $D$  sino 1; sin embargo, el conjunto de los  $3^{kD}$  segmentos en los que se concentra la masa es completamente homotético con exponente  $D$ .

Examinemos ahora el problema del condicionamiento, una vez se ha llevado a cabo la construcción de Besicovitch a lo largo de un número de etapas  $K$ , finito pero grande. Para ello, elijamos un «intervalo de prueba» al azar, de longitud  $3^{-k}$ , donde  $k$  es menor que  $K$ ; en casi todos los casos, este intervalo caerá fuera del conjunto en el que está concentrada casi toda la masa. Con respecto a la densidad media en  $[0,1]$ , que ya sabemos que es igual a 1, la densidad en casi cualquier intervalo de prueba será casi despreciable. Su distribución será independiente del intervalo por el hecho de ser degenerada. Pero dividamos la densidad en el intervalo de prueba por su propia media. Encontraremos que la distribución de probabilidad de este cociente será también la misma en todas partes, y, además no degenerada. Todo ello está ilustrado en la Figura 151.

*Caos multiplicativo: generalización aleatoria de la medida fractal de Besicovitch*

Por muy sugerente que sea la construcción del párrafo anterior, aún hay que randomizarla. Se me han ocurrido varios métodos para hacer esto, a partir de unos trabajos de Kolmogorov, Obukhov y Yaglom (importantes, a pesar de algunos errores y ciertos aspectos discutibles). Para esbozar estos métodos, trabajemos en dos dimensiones y en división triádica. Cada nivel parte de una celdilla formada por nueve subceldillas, con una densidad inicial uniforme; después, las densidades correspondientes a las nueve subceldillas se multiplican por factores aleatorios, que siguen todos la misma distribución.

La construcción varía según el grado de aleatoriedad que se desee. El caso mínimo consiste en fijar de antemano los valores de estos factores, dejando sólo al azar la distribución de los mismos entre las celdillas. En el caos multiplicativo de Mandelbrot 1974d,f, se eligen al azar los factores multiplicativos, independientemente unos de otros.

El caos multiplicativo de Mandelbrot 1972j va más allá, y es el propio proceso el que engendra la cascada.

*P.S.* Los caos multiplicativos y las medidas fractales introducidos en Mandelbrot 1972j, 1974d,f se hallan en vías de devenir muy importantes. El término que parece prevalecer es el de «medida multifractal».

LÁMINA 151. *Escaleras diabólicas de Besicovitch*

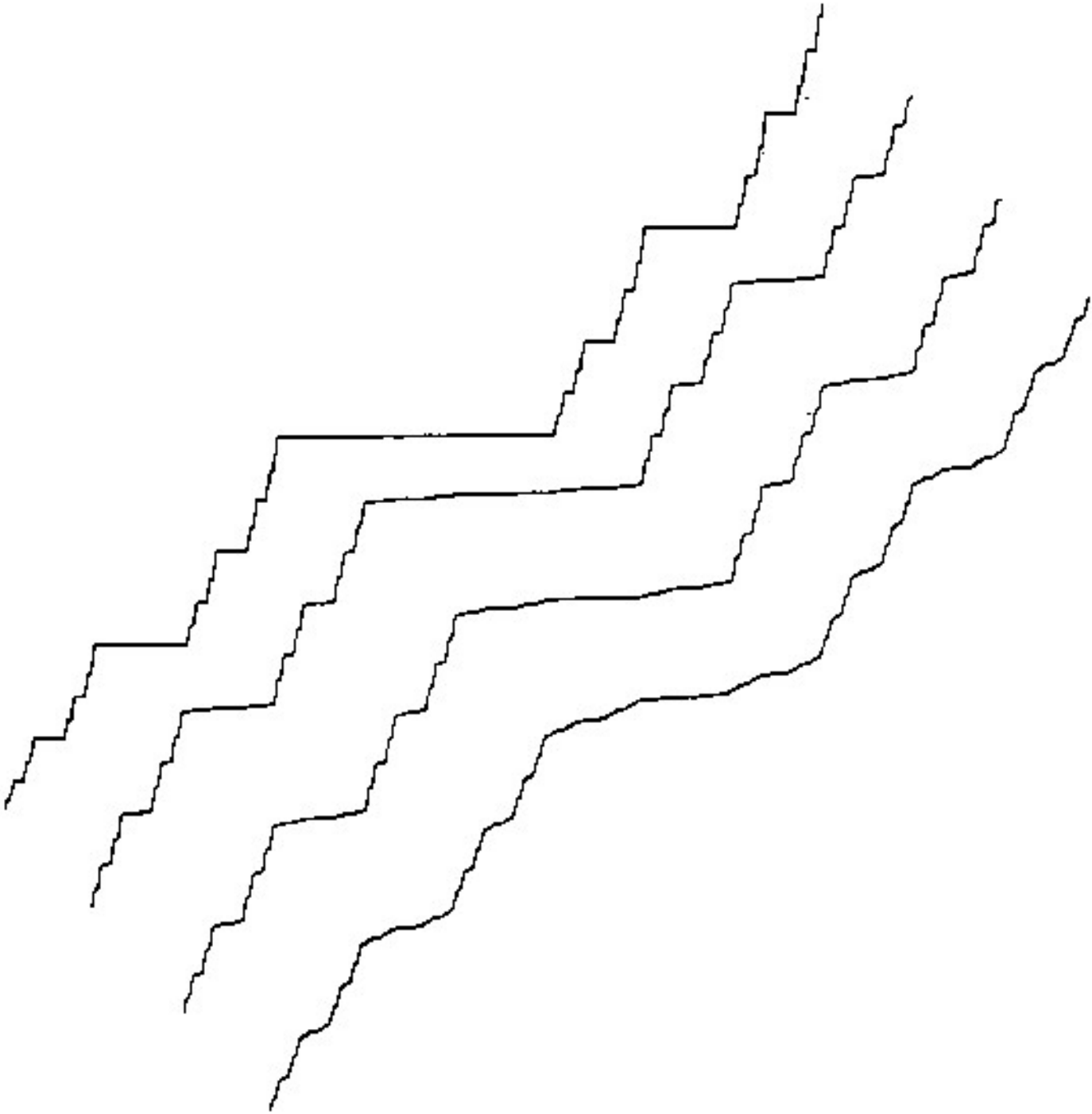


FIGURA 151

Bajo una escalera del diablo (véase la Figura 73), se ven tres escaleras de Besicovitch, cuya construcción se ha descrito en la pág. 148; aquí  $p_1 = p_3$ . Su característica más chocante, al compararla con la escalera del diablo, se puede observar si se divide la abscisa en un gran número de segmentitos. Ninguno corresponde a una marcha horizontal; sin embargo, una proporción muy grande del desplazamiento vertical tiene lugar en un desplazamiento horizontal muy pequeño, cuya dimensión fractal aumenta a medida que uno se aleja de la escalera de Cantor.



## Capítulo 10

### Los jabones, el carácter de dimensión de los exponentes críticos

Vamos a esbozar ahora el papel que juega la dimensión fractal en la descripción de una categoría de «cristales líquidos», que constituyen un modelo de ciertos jabones. Su geometría es muy antigua —pues se remonta a un griego de Alejandría, Apolonio de Perge, cosa que hace que los problemas sean fáciles de enunciar— y al mismo tiempo actual —pues el problema matemático que plantea sigue aún abierto. Además, nos deja entrever interesantes perspectivas muy generales, concernientes a uno de los dominios más activos de la física. Se trata de la teoría de los «puntos críticos», cuyo ejemplo más conocido es aquél en el que coexisten los estados sólido, líquido y gaseoso de una misma sustancia. Recientemente, los físicos han establecido que en el entorno de uno de esos puntos, el comportamiento de un sistema físico se rige por unos «exponentes críticos». La razón es que estos sistemas son «escalantes»: obedecen a unas reglas analíticas que se han desarrollado de un modo completamente independiente de la noción geométrica de homotecia interna, y que sin embargo presentan unas estrechas analogías con ella. (¿Será ésa una nueva manifestación del hecho de que la variedad de los fenómenos naturales es infinita, mientras que las técnicas matemáticas capaces de domarlos son muy poco numerosas?). Combinando soluciones analíticas, medidas empíricas y soluciones por ordenador, se han obtenido los valores numéricos de muchos exponentes críticos, pero su naturaleza conceptual sigue siendo oscura. Lo que se demuestra con el ejemplo del jabón es que, por lo menos uno de ellos, puede interpretarse como dimensión fractal, sugiriendo esto que bien pudiera ocurrir lo mismo con otros.

*Preliminar: el relleno de triángulos*

A modo de preliminar, empecemos por una construcción que está completamente en la línea de las que hemos encontrado anteriormente a lo largo de este texto. Partiendo de un triángulo equilátero cerrado (incluida la frontera), cuya base es horizontal y de longitud 1, y cuyo vértice está en la parte de arriba, se trata de recubrirlo «lo mejor posible» mediante triángulos equiláteros abiertos invertidos, cuyas bases son horizontales y que apuntan hacia abajo. Se comprueba que la cobertura óptima se obtiene cubriendo el cuarto central del triángulo inicial con un triángulo de lado 0,5, y procediendo análogamente con los cuartos restantes. El conjunto de puntos que quedarán por recubrir es debido a Sierpinski, y se denomina *tamiz*. Está claro que su superficie es nula y que tiene una homotecia interna de dimensión de homotecia igual a  $\log 3/\log 2$ . Eggleston 1953 demuestra que este  $D$  es también la dimensión de Hausdorff-Besicovitch.

*Un modelo de jabón basado en el relleno apoloniano de círculos*

Uno de los modelos aceptados actualmente para el jabón —en términos más precisos y eruditos, una «fase esméctica A»— tiene la estructura siguiente: se descompone en capas que pueden deslizarse unas sobre otras, constituyendo cada una de ellas un líquido bidimensional, y que están plegadas en el interior de conos muy puntiagudos, que tienen

todos ellos el mismo vértice y son aproximadamente perpendiculares a un plano. Resulta de ello que sus círculos tienen un radio superior a un cierto mínimo que depende del grosor de las capas líquidas. Partiendo de un volumen simple que no sea un cono, por ejemplo una pirámide cuadrangular, tratemos de rellenarla de conos. Cada configuración corresponde a una repartición de los discos que constituyen las bases de dichos conos, en el cuadrado que hace de base de la pirámide. Se puede demostrar que la solución correspondiente al equilibrio se describe del modo siguiente: se inscribe en el cuadrado un círculo de radio máximo; a continuación, en cada uno de los trozos restantes, se inscribe también un círculo de radio máximo —como en la Figura 156— y así sucesivamente. Si fuera posible operar indefinidamente de este modo, se realizaría lo que los matemáticos llaman un relleno («packing») apoloniano. Si se postula, además, que los discos en cuestión son abiertos —esto es, que no incluyen sus fronteras— el relleno deja sin recubrir un resto de superficie nula, el «tamiz apoloniano».

Nuestra construcción se parece al problema preliminar referente a los triángulos, pero desafortunadamente tiene un grado de dificultad superior, puesto que el resto no tiene homotecia interna. No obstante, la definición de  $D$  debida a Hausdorff y Besicovitch (Capítulo 14), como exponente que sirve para definir la extensión de un conjunto, sigue siendo aplicable a este caso. Ése es un nuevo tema, que había que señalar (su importancia habría bastado para justificar el presente capítulo), pero en el que, sin embargo, no nos podemos detener. Existe por lo tanto una dimensión, pero no se ha conseguido aún determinar matemáticamente su valor. Bajo muchos puntos de vista se comporta como una dimensión de homotecia. Cuando, por ejemplo, se «trunca» el relleno apoloniano prohibiendo la utilización de círculos de radio inferior a  $\eta$ , los intersticios que quedan tienen un perímetro proporcional a  $\eta^{1-D}$  y una superficie proporcional a  $\eta^{2-D}$ . El valor numérico del  $D$  apoloniano es igual aproximadamente a 1,3058.

Volvamos a la física: Bidaux y otros 1973 han demostrado que las propiedades del jabón modelado de este modo dependen precisamente de la superficie y del perímetro del total de estos intersticios, estableciéndose la relación por medio de  $D$ . Así pues, acabo de mostrar cómo las propiedades esmécticas en cuestión se expresan más fácilmente mediante las propiedades fractales de una especie de «negativo» fotográfico, a saber, la figura que queda fuera de las moléculas.

LÁMINA 156. *Relleno apoloniano de círculos*

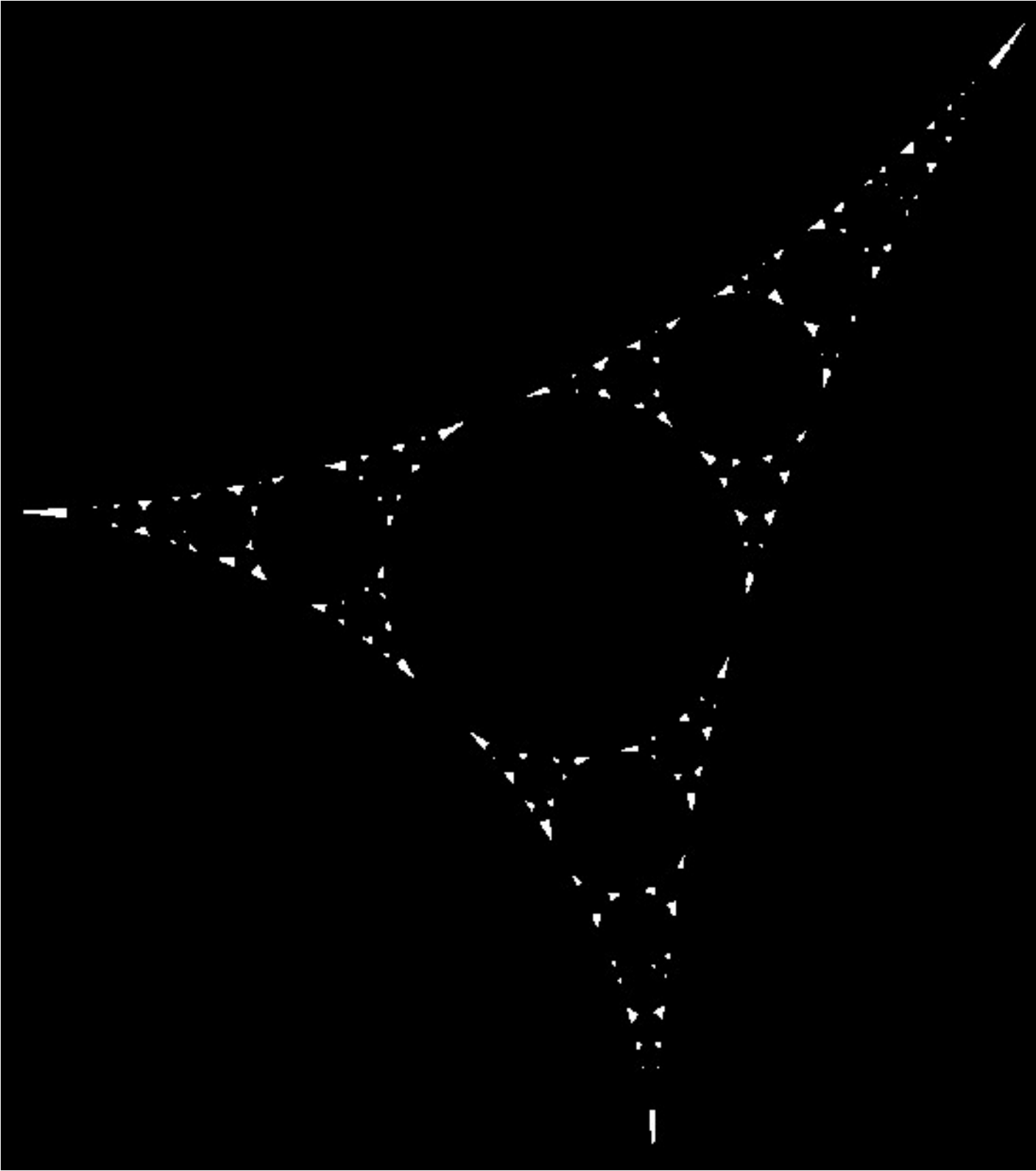


FIGURA 156

Apolonio de Perga supo construir el círculo tangente a tres círculos dados. Tomemos aquí tres círculos tangentes entre sí dos a dos, formando un «triángulo», e

iteremos indefinidamente la construcción de Apolonio. La unión de los interiores de estos círculos «rellena» nuestro triángulo, en el sentido de que recubre casi todos sus puntos. El conjunto de los puntos no recubiertos —denominado «tamiz apoloniano»— tiene superficie nula, pero su medida lineal, definida como suma de las circunferencias de los círculos del relleno, es infinita. Su dimensión de Hausdorff-Besicovitch es muy útil en física, como se ve en el Capítulo 10.

## Capítulo 11

### Ordenaciones de los componentes de ordenador

A lo largo de este Ensayo, subrayamos que la descripción fractal no tiene que llegar al fondo de las estructuras físicas subyacentes, pero puede detenerse a examinar el ordenamiento mutuo de las diversas partes de determinado objeto natural. Por este hecho, uno puede esperar que se encuentren igualmente consideraciones fractales en el dominio de lo artificial, en todos los casos en que éste resulte tan complejo que haya que renunciar a seguir al detalle los ordenamientos, contentándose con examinar algunas características muy globales. Este capítulo muestra que tal es efectivamente el caso con los ordenadores. La idea es ésta: para poder realizar un gran circuito complejo, es necesario subdividirlo en un gran número de módulos. Supongamos que cada uno de éstos consta de unos  $C$  «elementos», y que el número de terminales necesarios para conectar el módulo con el exterior sea del orden de  $T$ . En IBM se atribuye a E. Rent (que no ha publicado nada a este respecto; aquí me baso en Landman y Russo 1971) la observación de que  $C$  y  $T$  están relacionados por una fórmula del tipo  $T = AC^{1-1/D}$ ; el empleo de la letra  $D$  se justificará dentro de poco. La fórmula da una aproximación muy buena, siendo el error medio de  $T$  de sólo unos pocos por cien, excepto en algunos casos muy raros, en los que uno de los módulos contiene una gran parte de los elementos del circuito total. Los primeros datos habían sugerido que  $D \sim 3$ ; pero hoy se sabe que  $D$  aumenta con el rendimiento, que a su vez refleja el grado de paralelismo presente en la lógica del ordenador.

El caso  $D = 3$  fue explicado inmediatamente, asociándolo a la idea de que los circuitos en cuestión están dispuestos en el volumen de los módulos, y que éstos están en contacto a través de sus superficies. Expresemos, en efecto, la regla de Rent en la forma  $T^{1/(D-1)} \sim C^{1/D}$ . Por una parte, los distintos elementos tienen más o menos el mismo volumen  $v$ , y por consiguiente  $C$  es la razón: volumen total del módulo, dividido por  $v$ . Así pues,  $C^{1/D} = C^{1/3}$  es más o menos proporcional al radio del módulo. Por otra parte, las distintas terminales tienen más o menos la misma superficie  $\sigma$ , y por consiguiente  $T$  es la relación: superficie total del módulo, dividida por  $\sigma$ . Con lo que  $T^{1/(D-1)} = T^{1/2}$  es, también, proporcional al radio del módulo. En conclusión: cuando  $D = 3$ , la proporcionalidad entre  $C^{1/D}$  y  $T^{1/(D-1)}$  no es en absoluto inesperada.

Observemos que el concepto de módulo es ambiguo, y casi indeterminado. La organización de los ordenadores está jerarquizada en grado sumo, pero la interpretación anterior es totalmente compatible con esta característica, en la medida en que, en cualquier módulo de un cierto nivel dado, los submódulos se interconectan por medio de sus superficies.

Es también fácil ver, en el contexto de más arriba, que  $D = 2$  corresponde a circuitos dispuestos en el plano en vez del espacio. Del mismo modo, en un *shift register*, los módulos forman una cadena, igual que los elementos, y se tiene que  $T = 2$ , independientemente de  $C$ , de tal manera que  $D = 1$ . Finalmente, cuando el paralelismo es integral, cada elemento ha de tener su propio terminal; con lo que  $T = C$ , y puede decirse que  $D = \infty$ .

Por el contrario, si el valor de  $D$  es distinto de 1, 2, 3 ó  $\infty$ , la idea de interpretar  $C$  como un efecto de volumen y  $T$  como uno de superficie se hace insostenible, mientras uno

siga siendo esclavo de la geometría ordinaria. No obstante, estas interpretaciones son muy útiles y conviene conservarlas.

El lector debe haber imaginado ya qué es lo que se puede hacer en estos casos: propongo que se imagine que la estructura de los circuitos se presenta en un espacio de dimensión fraccionaria. Para visualizar el paso de  $D = 2$  a  $D = 3$ , pensemos en un subcomplejo de dimensión  $D = 2$  en términos de circuitos metálicos impresos en una placa aislante: para aumentar el rendimiento es necesario establecer nuevas interconexiones. A menudo, para no intersecar conexiones ya impresas, hay que interconectar por medio de hilos que se salen de la placa, los cuales se han de soldar separadamente; habitualmente se utilizan para ello hilos amarillos. La presencia de hilos amarillos puede significar simplemente que el circuito ha sido mal diseñado, pero el número mínimo de hilos necesarios aumenta también con el rendimiento. Sin entrar en los detalles del razonamiento, se puede decir que la regla de Rent es válida en todos aquellos casos en que el aumento del rendimiento obliga al arquitecto a salirse del plano sin necesidad de utilizar toda la potencia que le dan las tres dimensiones del espacio; si, además, el sistema total incorpora una jerarquía con homotecia interna, todo ocurre «como si» el arquitecto trabajara en un espacio que tuviera un número fraccionario de dimensiones.

## Capítulo 12

### Arboles jerárquicos, o de clasificación, y la dimensión

El grueso de este Ensayo está dedicado a objetos concretos que se pueden ver y tocar, independientemente de que sean de origen natural (Capítulos 2 a 10) o artificial (Capítulo 11). Por el contrario, este último capítulo se refiere a algo más abstracto, a saber, las estructuras matemáticas de árbol ponderado regular. Hay varias razones para alejarse ahora de los objetos «reales». La primera es que el razonamiento sigue siendo sencillo, y contribuirá, según creo, a aclarar un nuevo aspecto del concepto de dimensión de homotecia, aspecto que se habrá empobrecido al perder toda base geométrica, con lo que, de alguna manera se habrá hecho «irreducible». La segunda razón para estudiar los árboles en cuestión es que aparecen enseguida en varias aplicaciones.

*Arboles lexicográficos. Ley de las frecuencias de las palabras (Zipf-Mandelbrot)*

Vamos a examinar de entrada unos árboles capaces de clasificar las palabras del léxico. De sus propiedades deduciremos una ley teórica «óptima» de las frecuencias de las palabras, que, por una parte, resultará representar la realidad de una manera excelente, y por la otra, invocará una dimensión fractal. Definiremos el léxico como el conjunto de las sucesiones de letras que se pueden admitir como palabras. Estas últimas estarán separadas por espacios en blanco que, por comodidad, supondremos que indican el principio de cada palabra.

Construyamos para representarlo el árbol siguiente: el tronco representa el espacio en blanco; se subdivide en  $N$  ramas de primer nivel, correspondiendo cada una de ellas a una de las letras del alfabeto; cada rama se subdivide a su vez en  $N$  ramas de segundo nivel, y así sucesivamente. Está claro que cada palabra puede ser representada por una de las ramificaciones del árbol, y que a cada ramificación se le puede asignar un peso, a saber, la probabilidad de empleo de la palabra correspondiente (cero para las sucesiones de letras que no son admisibles como palabras).

Antes de examinar los árboles lexicográficos reales, veamos qué ocurre si la codificación de las palabras por medio de letras y espacios en blanco es óptima, en el sentido de que el número medio de letras es el menor posible. Tal sería el caso si, en un sentido que aquí sería pesado de explicar con detalle, las frecuencias de las palabras se «adaptan» a la codificación de letras y espacios en blanco. He demostrado (en unos trabajos que empezaron en 1951 y que están resumidos en Mandelbrot 1965z, 1968p, entre otros) que para ello es necesario que el árbol lexicográfico sea regular, en el sentido de que cada ramificación (hasta un nivel máximo finito) corresponda a una palabra, y que los pesos-probabilidad correspondientes al nivel  $k$  sean todos de la forma  $U = U_0 r^k$ . El factor  $U_0$  —que no explicitaremos— garantiza que la suma total de los pesos-probabilidad sea igual a 1.

A fin de deducir la distribución de frecuencias de las palabras a partir de la regularidad del árbol, ordenemos las palabras según frecuencias decrecientes (si hay varias frecuencias iguales, las ordenaremos arbitrariamente). Sea  $\rho$  el rango que tiene en esta clasificación una palabra de probabilidad  $P$ . Veremos dentro de poco que, cuando el árbol

lexicográfico es regular, se tiene aproximadamente que:

$$U = P(\rho + V)^{-1/D}$$

e inversamente:

$$\rho = -V + U^{-D}P^D$$

con  $P$ ,  $V$  y  $D$  constantes. Esta fórmula, que he obtenido mediante un razonamiento analítico, resulta ser una generalización de una fórmula empírica divulgada por Zipf 1949 (véase el Capítulo 15); representa excelentemente los datos empíricos acerca de las frecuencias de las palabras en los idiomas más diversos. Cuando hayamos deducido esta fórmula a partir de la hipótesis de que el árbol lexicográfico es regular, discutiremos brevemente su significado. Observemos ahora mismo, sin embargo, que  $D$ , el parámetro más importante de esta fórmula, será definido como

$$D = \log N / \log (1/r),$$

que formalmente es, por lo tanto, una dimensión. Dicho esto, midamos la riqueza del vocabulario por la frecuencia de uso relativa de las palabras raras, por la relación entre la frecuencia de la palabra de rango 100 y la de la de la palabra de rango 10, pongamos por caso. Para  $N$  constante, dicha riqueza aumenta con  $r$ . En otras palabras, cuanto mayor es la dimensión  $D$ , mayor es  $r$ , es decir, mayor es la riqueza del vocabulario.

Una vez admitida la regularidad del árbol de clasificación, me ha sido fácil demostrar la ley de Zipf generalizada; basta con notar lo siguiente: en el nivel  $k$ ,  $\rho$  varía entre  $1 + N + N^2 + \dots + N^{k-1} = (N^k - 1)/(N - 1)$  (que excluye el nivel  $k$ ) y  $(N^{k+1} - 1)/(N - 1)$  (que lo incluye). Tomando  $V = 1/(N - 1)$ , e introduciendo  $k = \log (U/U_0) / \log r$  en ambas expresiones, se tiene que

$$(U^{-D}U_0^D) - 1 < \rho/V \leq N(U^{-D}U_0^D) - 1$$

El resultado enunciado anteriormente se obtiene aproximando  $\rho$  por la media de ambas cotas.

Aunque sea poco realista conjeturar que el árbol lexicográfico es regular, el razonamiento anterior sirve para establecer que la ley de Zipf generalizada corresponde a «lo que era de esperar». Esta conclusión es confirmada por un razonamiento más fino (en el que no nos detendremos), que supone que la irregularidad del árbol es, en cierto modo, uniforme.

Paréntesis: se había esperado que la ley de Zipf aportaría mucho a la lingüística, e incluso a la psicología. De hecho —desde que la he explicado— el interés ha bajado y se ha concentrado en el estudio de las desviaciones con respecto a dicha ley.

Otro paréntesis: otra interpretación del cálculo anterior lleva a considerar  $D$  como la «temperatura del habla».

Por varios conceptos, el caso  $D = 1$  juega un papel muy especial. Para empezar, invirtamos la relación entre  $U$  y  $\rho$ . Vemos que la palabra de rango  $\rho$  tiene una probabilidad igual a  $P(\rho + V)^{-1/D}$ . Si  $D \geq 1$ , y por consiguiente  $1/D \leq 1$ , la serie  $\sum (\rho + V)^{-1/D}$  es divergente, cosa que sólo se puede evitar si  $\rho$  es acotado, lo que significa que el vocabulario consta de un número finito de palabras.

Por el contrario, si  $D < 1$ , el léxico puede muy bien ser infinito. En este caso,  $U_0$  vale  $1 - Nr$  y satisface que  $U_0 < 1$ . Se puede pues interpretar  $U_0$  como la probabilidad del espacio en blanco, y  $r$  como la probabilidad de una de las letras propiamente dichas; la

probabilidad  $U_0 r^k$  se interpreta entonces como el producto de las probabilidades del espacio en blanco y de las letras que componen la palabra en cuestión. Dicho de otro modo, el caso en que  $D < 1$  y el léxico es infinito, se interpreta del modo siguiente: tomemos una sucesión infinita de letras y espacios en blanco estadísticamente independientes, y utilicemos estos últimos para descomponer en palabras dicha sucesión. Las probabilidades de éstas seguirán la ley de Zipf generalizada.

Segundo papel de  $D = 1$ : en el caso  $D < 1$ , y sólo en este caso, el árbol lexicográfico puede ser reinterpretado geoméricamente. Para ello, tomemos el segmento  $[0,1]$  y descompongámoslo en  $N$  segmentos de la forma

$$[0,r], [r + (1 - Nr)/(N - 1), 2r + (1 - Nr)/(N - 1)], \dots, [(N - 1)r + (1 - Nr), 1]$$

y hagamos corresponder cada segmento al conjunto de las palabras que empiezan por una letra dada. A continuación, descompongamos cada uno de estos  $N$  segmentos en otros  $N$ , deducidos de los anteriores por una homotecia de razón  $1/N$ , y hagamos corresponder cada uno de éstos al conjunto de las palabras que empiezan por una secuencia dada de dos letras, etc. De esta manera, cada palabra corresponde al resto constituido por una reunión de  $N - 1$  segmentitos abiertos. El complemento de todos los conjuntos de esta forma es un conjunto cantoriano, cuya dimensión resulta ser igual a  $D$ . De esta manera, se puede interpretar la dimensión de un modo correcto. Por el contrario, si  $D > 1$ , una interpretación como la anterior es imposible, puesto que el léxico ha de ser finito, y un conjunto fractal sólo se puede obtener mediante una construcción infinita.

*Arboles jerárquicos, y distribución de la renta salarial (ley de Pareto)*

Un segundo ejemplo de árbol, quizás aún más sencillo que el anterior, se encuentra en los grupos humanos jerarquizados. Diremos que una jerarquía es regular si sus miembros están distribuidos por niveles, de tal manera que, excepto en el nivel inferior, cada miembro tiene el mismo número  $N$  de subordinados; y que estos últimos tienen todos el mismo «peso»  $U$ , igual a  $r$  veces el peso de su superior inmediato. Lo más cómodo es considerar el peso como si se tratase de un salario. (Obsérvese que las rentas no salariales no comportan ninguna jerarquía susceptible de ser representada por un árbol, con lo que no pueden introducirse como pesos en el presente argumento). Más aún, si hay que comparar diversas jerarquías desde el punto de vista del grado de desigualdad que implican en la distribución de las rentas, parece razonable ordenar sus miembros por rentas decrecientes (en el interior de cada nivel, la clasificación se hará de manera arbitraria), designar cada individuo por su rango  $\rho$ , y dar la renta en función del rango. Cuanto más deprisa decrece la renta al aumentar el rango, tanto mayor es el grado de desigualdad. El razonamiento utilizado anteriormente para las frecuencias de las palabras se aplica exactamente igual, probando que el rango  $\rho$  del individuo de renta  $U$  viene dado aproximadamente por la fórmula hiperbólica  $\rho = -V + U^{-D} P^D$ .

Esta relación muestra que el grado de desigualdad es determinado, ante todo, por la  $D$  de homotecia,  $D = \log N / \log(1/r)$ : cuanto mayor es la dimensión, mayor es  $r$ , y por lo tanto, menor es el grado de desigualdad.

Se puede generalizar ligeramente este modelo suponiendo que la  $U$  varía entre los distintos individuos de un mismo nivel  $k$ , siendo igual al producto de  $r^k$  por un factor aleatorio, el mismo para todo el mundo y que tenga en cuenta, por ejemplo, efectos tales como la antigüedad. Esta generalización modifica las expresiones que dan los parámetros  $V$

y  $P$ , pero deja  $D$  invariante. Desde el punto de vista empírico, la distribución de las rentas es claramente hiperbólica, cosa que se conoce como «ley de Pareto», y la demostración anterior, debida a Lydall 1959, constituye una posible explicación de la misma.

Subrayemos, no obstante, que la misma ley de Pareto se aplica también, aunque con un  $D$  distinto, a las rentas de la especulación. Esta observación plantea un problema completamente distinto, que he atacado en Mandelbrot 1959p, 1960i, 1961e, 1962e, 1963p, y 1963e.

Observemos que el  $D$  empírico es normalmente próximo a 2. Cuando vale exactamente 2, la renta de un superior es igual a la media geométrica de la del conjunto de sus subordinados, y de la de cada uno de sus subordinados tomado separadamente. Si fuera  $D = 1$ , dicha renta sería igual a la suma de las de sus  $N$  subordinados.

Acabemos con un despropósito. Independientemente de cuánto valga  $D$ , el número de niveles jerárquicos crece como el logaritmo del número total de miembros de la jerarquía. Si se desea dividirlos en dos clases, una manera intrínseca de hacerlo podría consistir en fijar el punto de separación en el nivel jerárquico medio; en tal caso, el número de miembros de la clase superior sería proporcional a la raíz cuadrada del número total. Hay muchas otras maneras de obtener esta «regla de la raíz cuadrada»; aparece, por ejemplo, asociada al número ideal de los representantes que distintas comunidades deberían enviar a un Parlamento en el que participan.

## Capítulo 13

### Léxico de neologismos

Si mis trabajos abundan en neologismos, es por necesidad. Aun cuando las ideas básicas son antiguas, hasta ahora habían sido tan poco esenciales que no había habido necesidad de términos específicos para designarlas, o bien había bastado con anglicismos o con palabras de factura precipitada y torpe, que no sirven para el uso amplio que propongo. Aprovecho la ocasión para incluir algunos de mis neologismos, que utilizo poco en este libro. Este capítulo no figuraba en la primera edición, pero desde 1976 han aparecido diversas versiones incompletas del mismo en distintas recopilaciones.

**ARRACIMAMIENTO.** *n.m.* 1.º: Aptitud para formar racimos jerarquizados. 2.º: Colección de objetos que forman racimos distintos, agrupados en superracimos y en super-superracimos, etcétera, de modo (al menos aparentemente) jerárquico. La pareja «racimo-arracimamiento» se ha pensado como correspondencia al inglés *cluster-clustering*, cuyo segundo miembro no tenía equivalente en español.

**ESCALANTE.** *adj.* Dícese de una figura geométrica o de un objeto natural cuyas partes tienen la misma forma o estructura que el todo, salvo que están a diferente escala y pueden estar ligeramente deformadas. *Advertencia:* El término *scaling*, tomado del inglés, está ya tan arraigado que es mejor no alejarse demasiado de él buscando un neologismo que lo sustituya.

**ESCALONADO.** *adj.* Dícese de una figura geométrica o de un objeto natural cuya estructura está dominada por un número muy pequeño de escalas intrínsecas muy diferenciadas. *Escalonado* es el contrario de *escalante* y la traducción de mi neologismo inglés *scalebound* (Mandelbrot 1981 1).

**FRACTAL.** *adj. Sentido intuitivo.* Que tiene una forma, bien sea sumamente irregular, bien sumamente interrumpida o fragmentada, y sigue siendo así a cualquier escala que se produzca el examen. Que contiene elementos distintivos cuyas escalas son muy variadas y cubren una gama muy amplia. *Razones de su necesidad:* Desde hará unos cien años, los matemáticos se habían ocupado de algunos de esos conjuntos, pero no habían edificado ninguna teoría acerca de ellos, y no habían necesitado, por lo tanto, ni la necesidad de un término específico para designarlos. Una vez que el autor ha demostrado que en la naturaleza abundan objetos cuyas mejores representaciones son conjuntos fractales, es necesario disponer de una palabra apropiada que no sea compartida con ningún otro significado.

**FRACTAL.** *n.f.* Configuración fractal; conjunto u objeto fractal. *Advertencia:* La palabra *fractal* no distingue, adrede, entre conjuntos matemáticos (la teoría) y objetos naturales (la realidad): se emplea en los casos en que su generalidad, y la ambigüedad deliberada que resulta de ello sean bien deseadas, bien aclaradas por el contexto, o no lleven inconvenientes asociados.

**Dimensión fractal.** *Sentido genérico:* Número que sirve para cuantificar el grado de irregularidad y fragmentación de un conjunto geométrico o de un objeto natural. La dimensión fractal no es necesariamente entera. *Sentido específico:* Se aplica a veces a la dimensión de Hausdorff y Besicovitch, pero ya no se recomienda tal uso.

**Conjunto fractal.** *Definición provisional:* Conjunto cuya dimensión fractal es

mayor o igual que su dimensión ordinaria (topológica).

**Objeto fractal.** Objeto natural que resulta razonablemente útil representarlo matemáticamente por un conjunto fractal.

**POLVO.** *n.f.* Colección totalmente discontinua de puntos, es decir, objeto de dimensión topológica igual a 0. *Razones de su necesidad:* Para denotar los objetos de dimensión topológica igual a 1 ó 2 tenemos dos términos familiares: curva y superficie. Necesitábamos también una palabra común para denotar objetos de dimensión topológica igual a 0.

**RANDON.** *n.m.* Elemento aleatorio. *Advertencia:* ¡No se trata de un anglicismo! No es suficientemente bien sabido que el inglés *random* (=aleatorio) procede del término francés arcaico *randon* (=rapidez, impetuosidad). Propongo resucitar la palabra, por ejemplo, en el contexto de los ejemplos que se tratan aquí.

**A randón.** *adv.* Al azar. *Advertencia:* Del término francés arcaico que designa, por ejemplo, la situación de un caballo cuyo jinete ha perdido el control.

**Randón browniano.** Superficie, función o campo browniano. *Advertencia:* Cuando se trate de una función euclídea de variable real, y se quiera insistir en dicho orden y la dinámica subyacente, se preferirá *vagabundeo browniano* (véase más abajo).

**Randón de ceros browniano.** Conjunto de puntos en los que se anula el randón browniano.

**Randón de Lévy.** Adherencia del conjunto de los valores de un vagabundeo estable de Paul Lévy.

**Randón de ceros de Lévy.** Conjunto en el que se anula un randón estable de Lévy.

**RANDONIZAR.** *v.tr.* Introducir un elemento de azar. Randonizar una lista de objetos consiste en reemplazar su orden original (que, por ejemplo, podría ser alfabético) por un orden elegido al azar; a menudo se toman como equiprobables todas las ordenaciones posibles.

**TAMIZ.** *n.m. de Sierpinski.* Curva fractal introducida por W. Sierpinski, cuyo complemento está formado por triángulos (página 154). Esta curva ha adquirido una gran importancia en física. *Apoloniano.* Curva fractal cuyo complemento está formado por círculos (página 156). *Sentido genérico:* Curva topológicamente idéntica al tamiz apoloniano y al de Sierpinski.

**TREMA.** *n.m.* Muchas fractales se construyen partiendo de un espacio euclídeo y eliminando una colección de conjuntos abiertos que llamo *tremas*. *Etimología:* Del griego *τρῆμα* = agujero, puntos sobre un dado, próximo al latín *termes* = termita.

**VAGABUNDEAR.** *v.intr.* Desplazarse al azar.

**VAGABUNDEO.** *n.m.* Función que da la posición de un punto del espacio cuya evolución temporal está gobernada por el azar. Sinónimo de «función aleatoria». *Motivo de la deriva semántica sugerida:* En el lenguaje visual, *vagabundeo* designa una excursión carente de una meta precisa, o cuya meta cambia a medida que se va avanzando y resulta, por lo tanto, imprevisible. Si se considera lo aleatorio como un modelo de lo imprevisible, el comportamiento psicológico subyacente en el sentido usual de *vagabundeo* encaja bien en el concepto matemático propuesto. Este término es especialmente recomendado en los contextos que nos ocupan.

**Vagabundeo de Bernouilli.** Incrementos de la fortuna de «Pedro» (y disminuciones subsiguientes de la de «Pablo») en el transcurso del juego de cara o cruz que simbólicamente se les asocia desde 1713, año en que Jakob Bernouilli publicó su *Ars Conjectandi*. Emplean una moneda de Basilea que conserva eternamente un sesgo

invariable entre las probabilidades de cara o cruz.

**Vagabundo browniano.** Movimiento browniano.

## Capítulo 14

### Apéndice matemático

Con esfuerzo deliberado he eliminado de este ensayo cualquier fórmula «complicada», pero espero que muchos lectores querrán saber algo más. Para facilitarles la transición a las obras especializadas, este apéndice reúne algunas pequeñas discusiones, combinando las principales definiciones con algunas referencias. Por razones de comodidad, el orden en que se presentan aquí los conceptos es distinto de aquél con que han ido apareciendo a lo largo del texto.

*¿Es necesaria una definición matemática de las fractales?*

Es necesario justificar la determinación adoptada de antemano en el texto de *caracterizar* los objetos fractales de un modo intuitivo y laborioso, evitando *definirlos* de una manera matemática y compacta, por medio de figuras o conjuntos que se habrían llamado fractales. Si he procedido así ha sido por miedo a enredarme en detalles que no tuvieran una contrapartida concreta. En efecto, aunque esté perfectamente dispuesto a contradecir a mis antepasados científicos (de los que hay que exceptuar a Jean Perrin), declarando que una parte de aquello que ellos solían clasificar como patología matemática se ha de clasificar en lo sucesivo como la expresión de la robusta complejidad de la realidad, pienso que en general tenían toda la razón. La mayoría de los refinamientos analíticos no tienen una contrapartida concreta, y no harían sino complicar la vida inútilmente a aquellos que se los encontrarán en el curso de una teoría científica. Más concretamente, una vez definido un concepto cualquiera de dimensión  $D$ , se puede tratar de definir un conjunto fractal como aquél para el cual, o bien  $D$  es un número real no entero, o bien  $D$  es un entero, pero el conjunto, globalmente, es «irregular», como en el caso en que, siendo  $D = 1$ , no se trata de una curva continua y rectificable. Sin embargo, la teoría de la rectificabilidad es demasiado confusa para decidirse a depender de ella; además, puede suceder a menudo que perturbando un conjunto muy clásico en el entorno de un solo punto, su dimensión se haga fraccionaria. Desde el punto de vista de las aplicaciones concretas, tales ejemplos serían insostenibles. Es a fin de evitarlos por lo que renuncio a definir el concepto de conjunto fractal.

*Dimensión (fractal) de contenido o dimensión de Hausdorff- Besicovitch*

Entre las numerosas definiciones de dimensión fraccionaria, la primera es la propuesta por Hausdorff (1919). Se aplica a figuras muy generales, que no tienen por qué tener una homotecia interna. Para clarificarla, es conveniente descomponerla en partes. Se parte, de entrada de un espacio métrico  $\Omega$  de puntos  $\omega$ , es decir, un espacio en el que se ha definido, de manera conveniente, la distancia entre dos cualesquiera de sus puntos, y por consiguiente la bola de centro  $\omega$  y radio  $\rho$ ;  $\Omega$  puede ser, por ejemplo, un espacio euclídeo. Consideremos un conjunto  $\theta$  en  $\Omega$  cuyo soporte sea acotado, es decir, esté contenido en una bola finita. Es posible aproximar  $\theta$  por exceso, mediante un conjunto finito de bolas de  $\Omega$  tales que cualquier punto de  $\Omega$  esté contenido por lo menos en una de ellas. Sean sus radios

$\rho_m$ . En un espacio euclídeo de dimensión  $d = 1$ , el contenido de una bola de radio  $\rho$  es  $2\rho$ ; si la dimensión euclídea es  $d = 2$ , es  $\pi\rho^2$ , y en general, es  $\gamma(d)\rho^d$ , en donde

$$\gamma(d) = [\Gamma(1/2)]^d / \Gamma(1 + d/2)$$

Esta expresión  $\gamma(d)\rho^d$  resulta de una interpolación natural que permite definir el «contenido» formal de una bola de dimensión  $d$  no entera. Por extensión, la suma  $\gamma(d)\sum\rho_m^d$  constituye una aproximación natural del «contenido» de  $\theta$ , desde el punto de vista de la dimensión formal  $d$ . Sin embargo, dicha aproximación es muy arbitraria. Para hacerla intrínseca, es razonable, en una primera etapa, fijar un radio máximo  $\rho$  y considerar todos los recubrimientos tales que  $\rho_m < \rho$ . Diremos que la aproximación es tanto más «económica» cuanto más se acerque al límite inferior  $\inf_{\rho_m < \rho} \gamma(d)\sum\rho_m^d$ . La segunda etapa consiste en hacer que  $\rho$  tienda a cero. Al hacerlo, la limitación impuesta a los  $\rho_m$  es cada vez más restrictiva, por lo tanto el  $\inf_{\rho_m < \rho}$  no puede sino aumentar y la expresión

$$\gamma(d)\lim_{\rho \rightarrow 0} \inf_{\rho_m < \rho} \sum \rho_m^d$$

está bien determinada. Se demuestra finalmente que existe un valor  $D$  de  $d$  tal que para  $d < D$ ,  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \inf_{\rho_m < \rho} = \infty$ ,

mientras que,

$$\text{para } d > D, \lim_{\rho \rightarrow 0} \inf_{\rho_m < \rho} = 0$$

(De hecho, en este caso se tiene que  $\inf_{\rho_m < \rho} = 0$  para todo  $\rho$ , pues el mejor recubrimiento se hace con bolas mucho más pequeñas que  $\rho$ ). El  $D$  así definido es lo que se llama «dimensión de Hausdorff-Besicovitch».

Cuando  $\Omega$  es un espacio euclídeo de dimensión  $E$ , la expresión  $\inf \gamma(E)\sum\rho_m^E$  relativa a  $\theta$  es finita, siendo como mucho igual al resultado de la misma expresión para la bola finita en la que  $\theta$  está contenido. Así pues,  $D \leq E$ . Para más detalles, se puede consultar: Kahane y Salem 1963, Federer 1969 o Rogers 1970.

#### *Medida de Hausdorff-Besicovitch*

El «contenido» que corresponde al exponente  $D$  en la expresión  $\gamma(d)\lim_{\rho \rightarrow 0} \inf_{0 < \rho} \sum \rho_m^d$  de la sección precedente se llama «medida de Hausdorff». Puede ser, bien degenerada (nula o infinita) o bien no degenerada; únicamente es interesante este último caso, que incluye, en particular, el conjunto de Cantor, la curva de von Koch y el universo de Fournier. Si la medida de Hausdorff es degenerada, resulta que la potencia  $\rho^D$  mide el «contenido intrínseco» de  $\theta$  de manera imperfecta. Esto es lo que ocurre típicamente cuando el conjunto  $\theta$  es aleatorio, como por ejemplo la trayectoria del movimiento browniano, o el de Cauchy o el de Lévy. En todos estos casos, el concepto de dimensión se da por bueno, pero conviene profundizar más en el de «contenido». Besicovitch tuvo la idea de sustituir  $\gamma(D)\rho^D$  por una función  $h(\rho)$  más general que satisfaga  $h(0) = 0$ . Si es verdad —pues muy bien pudiera no ser así— que existe una función  $h(\rho)$  tal que el  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \inf_{\rho_m < \rho} \sum h(\rho_m)$  sea positivo y finito, dicho  $\lim \inf$  se denomina «medida de Hausdorff-Besicovitch», y se dice que el citado  $h(\rho)$  mide el contenido del conjunto  $\theta$  de manera exacta. Véase, por ejemplo, Kahane y Salem 1963 o Rogers 1970.

#### *Dimensiones (fractales) de recubrimiento*

Sea otra vez un conjunto en un espacio métrico  $\Omega$ , y un radio máximo  $\rho > 0$ . Pontijagin y Schnirelman 1932 recubren  $\theta$  por medio de bolas de radio igual a  $\rho$  según el método que exige el menor número de bolas  $N(\rho)$  (sin modificar  $N(\rho)$ , se puede reemplazar la condición de «radio igual a  $\rho$ » por la de «radio menor o igual que  $\rho$ »). Haciendo tender a continuación  $\rho$  hacia cero, se define la dimensión de recubrimiento por

$$\liminf_{\rho \rightarrow 0} [\log N(\rho) / \log (1/\rho)].$$

Kolmogorov y Tihomirov 1959 han estudiado en detalle el  $\log N(\rho)$ , designándolo como la  $\rho$ -entropía de  $\theta$ . Esto lleva a designar la dimensión de recubrimiento como la dimensión de entropía. Kolmogorov definió también otras cantidades que pueden servir para definir dimensiones fractales. Por ejemplo, sea  $M(\rho)$  el mayor número de puntos de  $\theta$ , tales que la distancia entre dos cualesquiera de ellos es superior a  $\rho$ . Por definición, la capacidad de  $\theta$  será  $\log M(\rho)$ , y la expresión  $\liminf_{\rho \rightarrow 0} \log M(\rho) / \log (1/\rho)$  será una dimensión que no hay que confundir con la dimensión de capacidad de Frostmann.

Tomemos como espacio  $\Omega$  el espacio euclídeo de dimensión  $E$ . Para estudiar los conceptos de longitud y de área de un conjunto  $\theta$  de  $\Omega$ , Minkowski 1901 sugirió que se empezara por regularizarlo y engrosarlo, sustituyéndolo por el conjunto  $\theta(\rho)$  de todos aquellos puntos cuya distancia a  $\theta$  fuera como máximo  $\rho$ . Se puede obtener  $\theta(\rho)$  por reunión de todas las bolas de radio  $\rho$  centradas en todos los puntos de  $\theta$ . Por ejemplo, una línea es sustituida por un «hilo», cuyo volumen dividido por  $2\pi\rho^2$ , proporciona una nueva evaluación de la longitud aproximada de la línea. Análogamente, una superficie es reemplazada por un «velo», cuyo volumen dividido por  $2\rho$ , nos da una nueva evaluación del área aproximada de la superficie. En general, Minkowski definió, para cualquier entero  $d$ , los contenidos superior e inferior de  $\theta$ , los cuales son respectivamente iguales a los límites superior e inferior (para  $\rho \rightarrow 0$ ) de la «densidad», que a su vez es igual al cociente: volumen  $E$ -dimensional de  $\theta(\rho)$ , dividido por  $\gamma(E-d)\rho^{E-d}$

La idea está comentada y discutida en detalle en Federer 1969. Cuando resulta que los contenidos superior e inferior son iguales, su valor común define el contenido (a secas).

La extensión de todas estas definiciones a los valores no enteros de  $d$  es completamente natural y se debe a Georges Bouligand. En otras palabras, si existe un valor  $D$  de  $d$ , tal que el contenido superior de  $\theta$  se anule para  $d > D$  y que el contenido inferior diverja para  $d < D$ , decimos que este valor de  $D$  es la dimensión de Minkowski-Bouligand de  $\theta$ .

#### *Dimensiones (fractales) de concentración para una medida (Mandelbrot)*

Sea  $\Omega$  siempre un espacio métrico, y supongamos además que para subconjuntos apropiados de  $\Omega$  tenemos definida una medida  $\mu(\theta)$ , que satisfaga  $\mu(\Omega) = 1$  y que sea «densa por doquier», en el sentido de que para toda bola  $A$  se tenga que  $\mu(A) > 0$ . Dado que «el conjunto en el que  $\mu > 0$ » es idéntico a  $\Omega$ , la dimensión de homotecia (si es aplicable) y la dimensión de recubrimiento son ambas idénticas a la dimensión de  $\Omega$ , y por consiguiente, no aportan nada nuevo al estudio de  $\mu$ . Puede ocurrir que podamos decir que  $\mu$  se concentra sobre un conjunto abierto, cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es menor que la de  $\Omega$ ; desgraciadamente, en el caso de conjuntos abiertos, dicha dimensión no puede ser interpretada concretamente de un modo natural, y se precisaría, por lo tanto, de

una nueva definición más directa. Al no haber encontrado nada al respecto en la literatura, he introducido (para mi uso personal) las siguientes definiciones, poco exploradas aún, pero que pudieran tener un interés más general.

Dados  $\rho > 0$  y  $0 < \lambda < 1$ , consideremos todos los recubrimientos de  $\Omega$  que utilizan bolas de radio menor o igual que  $\rho$ , y dejan sin cubrir un conjunto de  $\mu$ -medida menor o igual que  $\lambda$ . Sea  $N(\rho, \lambda)$  el mínimo del número de tales bolas. Las expresiones

$$\liminf_{\lambda \rightarrow 0} \liminf_{\rho \rightarrow 0} \log N(\rho, \lambda) / \log(1/\rho)$$

$$\liminf_{\rho \rightarrow 0} \log N(\rho, \rho) / \log(1/\rho)$$

definen una dimensión cada una de ellas. Para la primera, el caso más interesante es aquél en que la operación  $\liminf_{\rho \rightarrow 0}$  es independiente de  $\lambda$ , con lo que la operación  $\liminf_{\lambda \rightarrow 0}$  puede ser eliminada.

#### *Dimensión topológica*

Las dimensiones de homotecia, de recubrimiento y de medida están referidas todas ellas a espacios métricos. Las tres difieren en gran manera de un concepto mucho más común, el de dimensión en el sentido topológico. Esta cae *absolutamente fuera* de lo que nos ocupa, pero hay que mencionarla, ya que, si no, el papel casi exclusivo que juega en los tratados de matemáticas nos podría inducir a confusión. Se dice que dos espacios topológicos tienen la misma dimensión si entre sus puntos existe una aplicación continua e inyectiva. La leyenda de la Figura 49, que representa la curva de Peano, da algunos detalles al respecto; un libro curioso (tan útil como completamente desorganizado) de Gelbaum y Olmsted 1964 contiene gran cantidad de referencias a este tema; finalmente, entre los tratados, cabe citar el de Hurewicz y Wallman 1941.

Vemos pues cómo el concepto intuitivo de dimensión es multiforme: la dimensión de Hausdorff-Besicovitch, la de homotecia y la topológica no representan más que un aspecto particular cada una; además, puede muy bien darse el caso de que tomen valores distintos. Sabemos, por ejemplo, que la curva de von Koch y sus variantes tienen la dimensión de Hausdorff-Besicovitch igual a la de homotecia, las cuales toman un valor comprendido entre 1 y 2 ( $1 < D < 2$ ); por otra parte, al tratarse de curvas continuas y sin puntos dobles, tienen todas ellas la dimensión topológica igual a 1. El conjunto de Besicovitch del Capítulo 9 tiene una dimensión de Hausdorff-Besicovitch que satisface  $0 < D < 1$ , mientras que su dimensión de homotecia es igual a 1.

#### *Variables aleatorias Lévy-estables*

Será cómodo definir la variable aleatoria gaussiana reducida  $X$  como aquella que tiene la densidad

$$2^{-1} \pi^{-1/2} \exp(-x^2/4),$$

lo que nos permite asegurar que su función característica (transformada de Fourier) es  $\exp(-\zeta^2)$ . La media de  $X$  es nula y su varianza es  $\sigma^2 = 2$ . Pongamos de relieve la propiedad siguiente. Sean  $G'$  y  $G''$  dos variables gaussianas independientes, con  $\langle G \rangle = \langle G' \rangle = 0$ ,  $\langle G'^2 \rangle = \sigma'^2$  y  $\langle G''^2 \rangle = \sigma''^2$ ; entonces la suma  $G = G' + G''$  es también gaussiana con  $\langle G \rangle = 0$  y  $\langle G^2 \rangle = \sigma'^2 + \sigma''^2$ . Por consiguiente, la variable gaussiana reducida  $X$  es la solución de la ecuación funcional siguiente:

$$(S): s'X' + s'X'' = sX,$$

a la que se añade la condición subsidiaria

$$(A2): s'^2 + s''^2 = s^2.$$

La ecuación (S) define la estabilidad en el sentido de Lévy. Desde el punto de vista de (S) y de (A2),  $s'$  y  $s''$  son simplemente factores de escala. Aquí resultan ser proporcionales a  $\sigma'$  y  $\sigma''$ , pero en otros casos no ocurre lo mismo.

Para la distribución de Cauchy, tenemos

$$Pr(X > x) = Pr(X < -x) = 2^{-1} - \pi^{-1} \arctg x$$

Su densidad es  $\pi^{-1}(1+x^2)^{-1}$ , la transformada de Fourier de la función característica  $\exp(-|\zeta|)$ . Tiene la particularidad de que  $\langle |x| \rangle = \infty$ , y forzosamente todos sus momentos de orden entero son infinitos. La ecuación funcional (S) sigue siendo aplicable, pero el exponente en la condición subsidiaria es ahora igual a 1:

$$(A1): s' + s'' = s.$$

Aquí el factor de escala no puede estar ya definido por medio de los momentos, pero resulta ser igual a la distancia entre la mediana de  $X$  y sus cuartiles.

Finalmente, conservando la condición de estabilidad (S), es posible generalizar la condición subsidiaria en la forma:

$$(AD): s'^D + s''^D = s^D.$$

El caso  $D = 1$  se debe en realidad a Poisson (!), pero la extensión para  $D \neq 1$  es debida a Cauchy. Este creía que  $D$  podía ser cualquier número real positivo, pero Lévy —que reemprendió este estudio y lo concluyó— demostró que es necesario y suficiente tener  $0 < D < 2$ . En el caso simétrico (y por tanto isótropo), la densidad de probabilidad correspondiente toma la forma

$$\pi^{-1} \int_0^{\infty} \exp(-u^D) \cos(ux) du.$$

Esto es, la transformada de Fourier de la función característica  $\exp(-|\zeta|^D)$ . Salvo en el caso  $D = 2$  (Gauss) y  $D = 1$  (Cauchy), dicha densidad no puede ser expresada en forma analítica cerrada. Si  $D < 2$ , el momento  $\langle |X|^h \rangle$  únicamente es finito si  $h < D$ .

*Vectores aleatorios Lévy-estables*

Nos limitamos al caso isótropo. Lévy ha demostrado que si el vector aleatorio isótropo  $\mathbf{X}$  satisface

$$(S): s'\mathbf{X}' + s'\mathbf{X}'' = s\mathbf{X}$$

entonces se ha de tener que

$$(AD): s'^D + s''^D = s^D.$$

La función característica es aún  $\exp(-|\zeta|^D)$ . Se puede definir explícitamente este vector  $\mathbf{X}$  como integral de contribuciones vectoriales, cuyas direcciones cubren uniformemente toda la esfera unidad y cuyas longitudes son escalares aleatorios infinitesimales e independientes que siguen la misma distribución estable. O bien por otro

método:  $\mathbf{X}$  se representa como la integral extendida a todos los volúmenes elementales  $dx dy dz$  del espacio, de vectores definidos del modo siguiente: son nulos con una probabilidad de  $1-dx dy dz$ , y si no, tienen una longitud de  $|OP|^{-3/D}$ , siendo  $P$  el centro del volumen elemental y  $O$  el origen de coordenadas; todos estos vectores están además dirigidos de  $P$  hacia  $O$ . Hay distintos problemas de convergencia, pero se resuelven sin dificultad, como se ve fácilmente interpretando cada vector elemental como una fuerza gravitatoria. Su ley se hace newtoniana para  $D = 3/2$ , en cuyo caso se tiene la distribución de Holtmark; una discusión particularmente sencilla, dirigida a los físicos, es la de Chandrasekhar 1943. Los problemas de convergencia se resuelven por neutralización mutua de las pequeñas atracciones de las estrellas muy lejanas, orientadas en direcciones opuestas.

#### *Varias funciones brownianas*

Si el movimiento browniano ha sido el primer objeto fractal que se ha estudiado es por ser el más simple, no sólo desde el punto de vista físico, sino también desde el de las matemáticas (Wiener, Lévy). Además, un gran número de otros objetos fractales pueden ser obtenidos modificando la definición del movimiento browniano de una manera completamente natural. Vamos a dar aquí una lista de las más importantes de entre estas generalizaciones. El prototipo irreducible es el movimiento browniano escalar ordinario. Una vez normalizado, consiste en una función aleatoria gaussiana, del escalar  $t$  al escalar  $B$ , tal que  $(B(t) - B(0))^2 = t^{2H}$ , con  $H = 0,5$ .

La primera generalización afecta a la  $B$ , sustituyendo el escalar por un vector, o también —cosa que lleva al mismo resultado— considerando un punto cuyas coordenadas son movimientos brownianos independientes.

Una segunda generalización vuelve al punto de partida de un  $B$  escalar y sustituye a continuación el  $H = 0,5$  por otro valor comprendido entre 0 y 1, con lo que se cambia  $t$  por  $t^{2H}$ . Esto conduce al movimiento browniano fraccionario, cuyas principales propiedades —incluida una construcción efectiva— están descritas por Mandelbrot y Van Ness 1968. Naturalmente, como ya se ha dicho en el Capítulo 6, ambas generalizaciones pueden combinarse.

Una tercera manera de generalizar  $B(t)$ , debida a Paul Lévy, se refiere a la  $t$ , y sustituye este escalar por un punto  $P$ . Una construcción efectiva de  $B(P)$ , a partir del ruido gaussiano blanco, ha sido dada por Tchentsov. La combinación de las generalizaciones segunda y tercera ha sido llevada a cabo por R. Gangolli, debiéndose a Mandelbrot 1975b la construcción efectiva.

Una cuarta generalización sustituye la distribución gaussiana por otra distribución Lévy-estable; sirve mucho en el Capítulo 5.

## Capítulo 15

### Bosquejos biográficos

Este Ensayo cita muchos autores, algunos de los cuales habían sido coronados, con justicia, con todos los laureles (tales como Jean Perrin y John William Strutt, tercer Barón Rayleigh), mientras que otros permanecían marginados, a menudo hasta su muerte. Parece como si para ellos el tiempo haya transcurrido lentamente, dejándoles el entretenimiento (a menos que haya que decir que les imponía la necesidad) de ir afinando, al filo de los años, unas ideas que nadie les disputaba. Se encuentran entre ellos tres sabios a los que profeso una admiración particular. Con ánimo de compartirla con el lector, queriendo saber más sobre uno de ellos —así como también de un cuarto autor, del que no sé casi nada— y deseando, en fin (como se ha dicho en la introducción), que este Ensayo contribuya a la historia de las ideas, voy a terminar con unos bosquejos biográficos.

*Louis Bachelier: 11/3/1870-28/4/1946*

El trabajo de Roger Brown se remonta a 1827, a la prehistoria, y la teoría física actual ha sido creada entre 1905 y 1910, por Perrin, Einstein, Langevin, Fokker y Planck. En cuanto a la teoría matemática, siguió a la física, con Wiener, que la fundó a partir de 1920, y posteriormente Lévy. Es inútil detenerse aquí en detalles que, por otra parte, son fácilmente accesibles.

Pero la historia hubiera podido proceder de otro modo, y las matemáticas y la ciencia económica (¡se trata de un caso verdaderamente único!) habrían precedido a la física, si la aventura de un precursor extraordinario hubiera tomado un cariz distinto. En efecto, una proporción verdaderamente increíble de los resultados de la teoría ya había sido descrita en los trabajos de Louis Bachelier, empezando por una Tesis de Estado, presentada en París el 29 de marzo de 1900. Sesenta años después de su publicación en los *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, tuvo el raro honor de ser reimpressa (en versión inglesa), pero con toda evidencia, su influencia directa había sido nula. Bachelier seguía en activo y publicaba, en las mejores editoriales, numerosas obras y largos memoriales. Además, su libro de divulgación *Le Jeu, la Chance et le Hasard* (Bachelier 1914) fue editado varias veces y aún se puede leer de una manera más que honrosa. No es un libro que se pueda dejar a cualquiera, pues el tema ha cambiado mucho, y está escrito en la forma de una sucesión de aforismos, que no siempre está claro si resumen conocimientos ya adquiridos, o esbozan problemas a explorar; el efecto acumulado de esta ambigüedad es bastante turbador.

A pesar de estos trabajos, Bachelier debió sufrir muchos reveses en su carrera y tenía 57 años cuando consiguió ser nombrado profesor en la Universidad de Besançon. Vista la lentitud de su carrera y lo tenue de la huella personal que ha dejado (mis investigaciones, aunque diligentes, no han podido encontrar más que migajas de recuerdos de alumnos y colegas, y ni la menor fotografía), su vida parece mediocre, y la celebridad postuma de su tesis ha hecho de él un personaje casi romántico. ¿A qué se debe este contraste? Una de las razones (aparte de los hechos de que no hizo escuela, de que su tesis sólo fue calificada con «notable», y de que no debía ser demasiado aprovechado) fue un

cierto error matemático, cuya historia me ha contado Paul Lévy en una carta del 25/ 1/1964; he aquí algunos extractos, que complementan lo que se puede leer en Lévy 1970, págs. 97-98:

«Oí hablar de él por vez primera pocos años después de la publicación de mi cálculo de las probabilidades; hacia 1928, uno o dos años después. Era candidato a un puesto de profesor en la Universidad de Dijon. Gevrey, que era profesor, vino a pedirme mi opinión acerca de un trabajo de Bachelier aparecido en 1913 (Ann. Ec. Norm.). En él definía la función de Wiener (antes que Wiener) del modo siguiente: en cada uno de los intervalos  $(n\tau, (n+1)\tau]$ , una función  $X(t|\tau)$  tiene derivada constante  $+v$  ó  $-v$ , siendo ambos valores igualmente probables, y un paso al límite ( $v$  constante, y  $\tau \rightarrow 0$ ) le daba  $X(t)$ . Gevrey estaba escandalizado por este error y me pedía mi opinión. Le dije que estaba de acuerdo con él y, a petición suya, se lo confirmé en una carta que leyó a sus colegas de Dijon. Bachelier fue rechazado, supo el papel que había tenido yo en ello, me pidió explicaciones, que yo le di, y que no le convencieron de su error... dejo de lado las consecuencias inmediatas de este incidente.

»Lo había olvidado todo ya, cuando en 1931, en la memoria fundamental de Kolmogorov, leo “der Bacheliers Fall”; busco entonces los trabajos de Bachelier, y veo que este error, que está por todas partes, no le impide llegar a resultados que, de haber escrito  $v = c\tau^{-1/2}$  en vez de  $v$  constante, habrían sido correctos, y que resulte que, antes de Einstein y Wiener, Bachelier haya visto algunas propiedades de la función llamada de Wiener o de Wiener-Lévy, en particular: la ecuación de la difusión, y la ley de la que depende  $\text{Máx}_{0 \leq t \leq \tau} X(t)$ . Habría un trabajo pendiente que nunca he llevado a cabo: buscar en los resultados de mi memoria de 1939 (Compositio Math.), cuáles son los que ya eran conocidos por Bachelier.

»Me había reconciliado con él. Le escribí que lamentaba que la impresión producida por un error al principio me hubiera impedido continuar con la lectura de trabajos en los que había tantas ideas interesantes. Me contestó con una carta que demostraba su gran interés por la investigación».

Fin de la cita.

Es trágico que sea Lévy quien haya jugado ese papel, pues veremos muy pronto como él también ha estado a punto de fracasar por falta de rigor matemático (sería cruel hablar aquí del grado de rigor matemático de las mejores teorías físicas de su tiempo... o del nuestro).

Otra razón de las dificultades de Bachelier se revela en el título de su tesis, que no he mencionado hasta ahora y que era «Teoría matemática de la especulación», no de la especulación (filosófica) acerca de la naturaleza del azar, sino de la especulación (en la Bolsa) a la alza o a la baja de la renta. Según palabras del ponente, Henri Poincaré: «El tema se aleja un poco de los que son tratados habitualmente por nuestros candidatos». No hay nada que indique cómo fue elegido el tema. Aunque el autor haya utilizado el lenguaje bolsista con facilidad, no se diría que haya sido un jugador. Es poco probable que haya reconocido la importancia de su modelo para los economistas (de la que hablo en Mandelbrot 1973), importancia que tardó sesenta años en ser generalmente reconocida. No cabe duda de que, simplemente, seguía la tradición y veía en el juego —según sus propias palabras— «la imagen más clara de los efectos del azar».

Sea cual fuera el motivo, llegó a considerar, en su *Notice* de 1921, que su principal contribución había consistido en proporcionar «imágenes sacadas de fenómenos naturales, como la teoría de la radiación de las probabilidades, en la que asimila una abstracción a una

energía, comparación imprevista y curiosa, punto de partida de numerosos progresos». Al respecto de estas asimilaciones, Henri Poincaré escribió: «M. Bachelier ha mostrado una mente original y precisa». Esta última frase procede del informe de la tesis, que vale la pena citar con más detalle: «La manera como obtiene la ley de Gauss es muy original y tanto más interesante cuando que el razonamiento podría ser extendido con algunos cambios a la propia teoría de errores». Lo desarrolla en un capítulo cuyo título puede, de entrada, parecer extraño: Radiación de la probabilidad. «El autor ha recurrido, en efecto, a una comparación con la teoría analítica de la propagación del calor. Una pequeña (*sic*) reflexión muestra que la analogía es real y la comparación legítima. Los razonamientos de Fourier son aplicables casi sin modificación a este problema, tan distinto de aquél para el que fueron inventados. Se puede lamentar que (el autor) no haya desarrollado más a fondo esta parte de su tesis». Poincaré se había percatado, pues, de que Bachelier había llegado hasta el propio umbral de una teoría general de la difusión.

Otros dos fragmentos de la *Notice* que merecen ser reproducidos son: «1906: *Théorie des probabilités continúes*. Esta teoría no guarda ninguna relación con la teoría de las probabilidades geométricas, cuyo alcance es muy relativo. Se trata de una ciencia de otro orden de dificultad y de generalidad que el cálculo de probabilidades clásico. Concepción, análisis y método, todo aquí es nuevo. 1913: *Les probabilités cinématiques et dynamiques*. Estas aplicaciones del cálculo de probabilidades a la mecánica son una contribución absolutamente personal del autor, que no ha tomado de nadie la idea primitiva; nunca se ha hecho ningún trabajo del mismo tipo. Concepción, método y resultados, todo es nuevo».

No se recomienda a los autores de la *Notice* que den muestras de modestia e incluso se espera que exageren a ultranza. Pero, contrariamente a la opinión de sus contemporáneos, Louis Bachelier no exageraba en absoluto.

¿Alguien sabe más de su vida y su persona?

Digresión: ¿Habría que completar las «Oeuvres» de Poincaré?

Los extractos de informes reproducidos más arriba han sido copiados de los Archivos de la Universidad de París VI —herederos de los de la antigua Facultad de Ciencias de París— con la amable autorización de las autoridades competentes. Todo el documento es apasionante, y está redactado, además, con el estilo admirable y lúcido que es típico en los escritos de «divulgación» del autor.

Este caso nos sugiere lo siguiente: el secreto académico, que protege tales documentos, obedece expresamente a las mismas reglas que el secreto diplomático y que el de las correspondencias privadas. Hasta hoy, todo un aspecto de la personalidad de Poincaré está ausente de sus Obras, que se dicen Completas.

*Edmund Edward Fournier d'Albe: 1868-1933*

Un párrafo en el *Who is Who?*, después en el *Who was Who?*, sus libros en bibliotecas, algunos pocos comentarios acerca de su modelo —en general sarcásticos, a excepción del comentario de Charlier—, que por otra parte no parece haber querido apropiarse de aquello que admiraba. Ésta es toda la huella que ha dejado este extraño autor. Fue un activo inventor (el primero en transmitir una imagen de televisión desde Londres); fue un místico religioso; a pesar de su apellido, de su educación parcialmente alemana y de su residencia en Londres, fue un patriota irlandés, militante de un movimiento pancéltico. Su obra es de ésas ante las que uno se queda sorprendido por no encontrar nada de sensato,

y sobre las que uno teme llamar demasiado la atención, por mor de hacer que el resto se tome en serio; pero se le debe algo perdurable, la primera formalización de una intuición muy importante, ya difundida antes de él, es cierto, pero sólo de una forma muy vaga. Sería bueno saber un poco mejor en qué terreno ha podido formarse.

*Paul Lévy: 15/9/1886-5/12/1971*

Paul Lévy —a quien considero mi maestro, aunque él no haya reconocido tener ningún alumno en el sentido usual— realizó lo que Bachelier solamente había insinuado. Su vida fue lo bastante larga como para que se supiera reconocido como uno de los más grandes probabilistas de todos los tiempos, e incluso para llevarle (casi a los 80 años) al sillón de Poincaré y de Hadamard en la Académie des Sciences. Sin embargo, durante toda su vida activa había sufrido el ostracismo de la Universidad, cosa que no dejaba de mortificarle, aunque sin sorprenderle, ya que, como escribió en su autobiografía (Lévy 1970), aun temiendo «no ser sino un superviviente del siglo pasado», tenía «la sensación muy clara de ser un matemático distinto de los demás». Trabajando solo, con pocas obligaciones que lo distrajeran, aparte de su profesorado en la Ecole Polytechnique, transformó una pequeña colección de resultados heteróclitos en una disciplina en la que se obtienen resultados ricos y variados con métodos cuya economía de medios es verdaderamente clásica.

Continuo con algunas observaciones que parafrasean lo que dije una vez en ocasión de una ceremonia dedicada a su memoria:

«Hablemos para empezar de su enseñanza en la Polytechnique. De sus clases, dado que me tocó un lugar al final de todo del anfiteatro y que Lévy tenía una voz más bien débil, me quedó una imagen borrosa. El recuerdo más vivaz es el del parecido que algunos de nosotros habíamos visto entre su silueta larga, cuidada y gris, y la manera un tanto especial que tenía de trazar el símbolo de integración en la pizarra.

»Pero el curso escrito era algo fuera de lo común. No se trataba de un curso tradicional, bien ordenado, que empieza con un rosario de definiciones y lemas, seguido de unos teoremas en los que las hipótesis se repiten claramente, con algunos resultados indemostrados en los que esto se hace constar con toda claridad. Más bien me queda el recuerdo de un aluvión tumultuoso de observaciones y aclaraciones. En su autobiografía, Lévy sugiere que, para que los chicos se interesen por la geometría, habría que ir tan aprisa como fuera posible a los teoremas que no pueden ser considerados evidentes. En la X,<sup>[2]</sup> su método no era muy distinto de eso. Para dar una idea de su estilo, uno se encuentra irresistiblemente tentado de utilizar imágenes de alpinismo, igual que le había ocurrido a Henri Lebesgue, hace mucho tiempo, en una reseña de otro gran Curso de Análisis de la X, el de Camille Jordán. Igual que Jordán, efectivamente, Lévy no se parecía a “alguien que tratara de alcanzar el punto más alto de una región desconocida, prohibiéndose mirar a su alrededor antes de alcanzar la cumbre. Si lo consigue, de allá arriba verá como domina muchas cosas, que no sabrá muy bien qué son. Conviene recordar también que desde las cimas muy altas, en general no se ve nada; los alpinistas sólo suben a ellas por el placer del esfuerzo realizado”.

»No hace falta decir que los apuntes multicopiados del curso escrito de Lévy no tenían una popularidad universal. Para muchos excelentes aspirantes eran —a la espera del examen general— una fuente de inquietud. En la última edición (que conocí en 1957-1958, cuando era su profesor agregado) estos rasgos eran aún más acentuados; la exposición de la

teoría de la integración, por ejemplo, era francamente aproximativa. Uno no hace bien su trabajo cuando intenta forzar su talento, ha escrito; parecía como si en su último curso su talento hubiera sido forzado en exceso. Pero del curso que dio a la promoción de 1944, me ha quedado un recuerdo sumamente positivo. Aunque la intuición no se pueda enseñar, es muy fácil de contrariar. Creo que esto es lo que Lévy trataba por todos los medios de evitar, y creo que lo conseguía.

»Todavía en la “Ecole”, yo había oído muchas alusiones a su obra creadora. Se decía que ésta era muy importante, pero se añadía inmediatamente que lo más urgente era rigourizarla. Ésto se ha hecho ya, y los nietos intelectuales de Lévy se regocijan de ser considerados y aceptados como matemáticos de cuerpo entero; se ven a sí mismos, según ha dicho hace poco uno de ellos, como “probabilistas aburguesados”. Esta aprobación se ha pagado muy cara: el cálculo de probabilidades no se ha “revisado”; se ha desmembrado deliberadamente y se ha dispersado entre las diversas ramas de las matemáticas. Está aún por construir una teoría del azar, cuyo polo hubiera tenido que ser el cálculo de probabilidades. En todas las ramas del saber parece haber unos niveles de precisión y de generalidad insuficientes, no aptos para atacar otros problemas más simples. También existe, cada día más, ramas del saber cuyos niveles de precisión y de generalidad van más allá de la demanda razonable. Por ejemplo, se puede tener necesidad de cien páginas de preliminares suplementarios, para poder (sin abrir ningún nuevo horizonte) demostrar un solo teorema en una forma que sólo resulta un poquito más general. Finalmente, en algunas ramas del saber hay niveles de precisión y generalidad que se podrían calificar de clásicos. La grandeza casi única de Paul Lévy es haber sido un precursor sin haber dejado de ser clásico».

Para terminar, hablemos de las aplicaciones científicas. Se ocupó de ellas raramente, y los que tienen que resolver problemas bien planteados de entrada, rara vez encuentran en su obra fórmulas preparadas para serles útiles; por esta razón no es muy citado. Por el contrario, de acuerdo con mi experiencia, aparece cada vez más como un coloso en la exploración de problemas nuevos. Ya se trate de los modelos a los que está dedicado este ensayo, u otros que toco en otras obras (por ejemplo de economía), la buena formalización parece exigir muy pronto algo del Lévy original, o de una herramienta que tenga el mismo espíritu y el mismo grado de generalidad. Se crea así entre sus teoremas y mis teorías, un paralelismo cada vez más notable, tanto más inesperado cuanto que aquéllos de mis trabajos que yo le pude comentar personalmente le sorprendieron tanto como a sus contemporáneos. Cada vez más, el mundo interior, en cuyo geógrafo se había erigido Lévy, revela haber tenido con el mundo que nos rodea (y que yo exploro) una especie de acuerdo premonitorio que, sin ninguna duda a este respecto, denota la genialidad.

*Lewis Fry Richardson: 11/10/1881-30/9/1953*

Según palabras de G. I. Taylor, Richardson «era un *character*<sup>[3]</sup> muy interesante y original, que rara vez pensaba en los mismos términos que sus contemporáneos, quienes a menudo no le comprendían». Había conseguido su diploma de A.B. de Cambridge en física, matemáticas, química, biología y zoología, pues dudaba acerca de la carrera a seguir. Habiéndose enterado de que Helmholtz había sido médico antes de hacerse físico, «me pareció que había participado del festín de la vida en el orden equivocado, y que yo pasaría la primera mitad de la mía bajo la disciplina estricta de la física, y aplicaría a continuación esta formación al estudio de las cosas vivas. Este programa era mi secreto...». Más tarde, a

la edad de 47 años, obtuvo su diploma de psicólogo en Londres. Su carrera comenzó en el Meteorological Office, consistiendo una de sus experiencias en medir la velocidad del viento, también en las nubes, disparando bolas de acero (cuyo tamaño variaba entre el de un guisante y el de una cereza). Como era cuáquero, fue objetor de conciencia en 1914-1918, y dimitió cuando el Meteorological Office se integró en el nuevo Air Ministry.

Su obra de 1922, *Weather Prediction by Numerical Process* (cuya reimpresión de 1965 contiene una biografía), fue la obra de un visionario práctico a quien, por desgracia, reprocharon un error fundamental. En efecto, cuando aproximó las ecuaciones diferenciales de evolución de la atmósfera por ecuaciones en diferencias finitas, eligió para los intervalos de espacio y tiempo unos valores que estaban muy lejos de satisfacer un cierto criterio de seguridad del cálculo. Al no conocerse aún la necesidad de tales normas, el error era apenas evitable, pero —debido a ello— la validez del principio del método de Richardson tuvo que esperar veinte años para ser reconocida.

Sin embargo, un aspecto de su libro ha sobrevivido claramente, llegando a ser clásico: es el concepto de cascada, tal como lo ha expresado en una parodia de Swift, texto que se ha hecho célebre y ha seguido siendo fecundo, por cuanto cada progreso en el estudio de la turbulencia parece descubrir una nueva faceta del mismo. El original y la parodia son intraducibles (pero ¿no tendría Swift un equivalente francés de la misma época?)<sup>[4]</sup>:

Swift:

*So, naturalists observe, a flea  
Hath smaller fleas that on him prey;  
And these have smaller fleas to bite'em;  
And so proceed ad infinitum.*

Richardson:

*Big whorls have little whorls,  
Which feed on their velocity;  
And little whorls have lesser whorls,  
And so on to viscosity (in the molecular sense).*

Siguió con el estudio de la turbulencia, y sus trabajos le valieron ser elegido para la Royal Society. La primera sección de uno de sus trabajos se titula: «¿Tiene velocidad el viento?» y empieza así: «la pregunta, que aparentemente es tonta, resulta serlo menos si uno la piensa a fondo». Muestra a continuación cómo se puede estudiar la difusión por el viento sin tener que hablar para nada de su velocidad. Alude —aunque más bien para desmarcarse de ella— a la función continua sin derivada de Weierstrass. Así pues, Richardson no disponía del vehículo fractal, pero su razonamiento es fácilmente traducible en términos de la visión «fractal» de la turbulencia, que este Ensayo introduce y defiende.

Una de sus últimas experiencias acerca de la difusión turbulenta precisaba de unas boyas muy visibles, preferentemente blanquecinas, que además estuvieran casi del todo sumergidas, para no coger viento, y finalmente en gran cantidad, y por lo tanto cuanto más baratas mejor. Su solución fue comprar un gran saco de chirivías, que hizo tirar de lo alto de un puente, mientras él observaba desde otro puente, río abajo.

Desde antes de 1939, una herencia le permitió anticipar su retiro del puesto administrativo que, con gran sorpresa de sus colegas, había decidido ocupar, y se consagró plenamente al estudio de la psicología de los conflictos armados entre estados; aparecieron

dos volúmenes después de su muerte, así como algunos artículos, uno de los cuales salvó del olvido sus trabajos acerca de la longitud de las costas.

*George Kingsley Zipf: 7/1/1902-25/9/1950*

Filólogo americano que poco a poco se convirtió en «ecólogo estadístico», Zipf sigue siendo conocido por un libro publicado por cuenta propia, titulado *Human Behavior and the Principle of Least Effort, An Introduction to Human Ecology*, Addison Wesley, 1949.

Conozco pocas obras (otra es la de Fournier d'Albe) donde tantos relámpagos de genialidad, proyectados en tantas direcciones, se pierdan en una ganga de elucubraciones tan espesa. Se encuentra, por una parte, un capítulo que trata de la forma de los órganos sexuales, y otro en el que se explica el Anschluss por una fórmula matemática; pero, por otra parte, nos ofrece un regimiento de figuras y cuadros, que machacan sin cesar la demostración empírica de la validez de una ley estadística, dos de cuyas aplicaciones han sido citadas en el Capítulo 12 de este Ensayo, y que tiene otras en innumerables dominios de las ciencias sociales. Si ha tenido dificultades para imponerse, ha sido sobre todo porque chocaba de frente con el dogma que entonces dominaba sin contestación entre los estadísticos de oficio: que todo en la naturaleza es gaussiano. Su obra conserva pues una importancia histórica considerable; dicho esto, hay que aclarar que Zipf no era verdaderamente original: entre las leyes que ha tratado, aquéllas de las que ha sido el primero o el único autor son las menos numerosas y las más contestables.

Nos gusta imaginar finales felices para las historias tristes, sobre todo cuando se han cortado bruscamente, pero en el caso de Zipf es difícil hacerlo así. En el combate contra un dogma estadístico, se había formado él mismo un dogma conceptual que habría sido aún más nocivo. Se ven en su obra, de la manera más clara —e incluso caricaturesca— las dificultades extraordinarias con que se tiene que enfrentar cualquier intento interdisciplinario.

## Capítulo 16

### Coda, post-scriptum y agradecimientos

Deliberadamente, he dejado «en el aire» los finales de los capítulos precedentes, y hago lo propio con la totalidad del ensayo. Si, como espero, las consideraciones fractales se integran pronto en la «geometría elemental», ello será gracias a una cierta combinación imprevisible de capricho, porque es bonito y nuevo, y de necesidad, porque será útil. No me gusta pensar que vaya a ser por la primera de estas razones, y es para ayudar al lector a creer que será por la segunda por lo que he preparado esta macedonia de libro.

\* \* \*

Pasemos a un *post-scriptum* fechado en marzo de 1984. Si el lector ha resistido hasta aquí es que mi macedonia le gusta, que se ha quedado con hambre y que quiere saber más. La edición de 1975 no era ya sino un bosquejo y mis esfuerzos se ven hoy recompensados con la adopción de las fractales en un número cada vez mayor de disciplinas, y por una explosión de trabajos que ya ni tan siquiera trato de seguir con detalle.

El desarrollo más ampliamente constatado y el más inesperado no ha sido de carácter científico, sino puramente estético. Los que habían encontrado elegancia en algunas ilustraciones de 1975 pueden considerarse profetas. En efecto, al seguir adelante con el estudio de las fractales, me fui encontrando, cada vez más a menudo, con objetos geométricos de una belleza creciente, incontestable, sorprendente y ambigua: de buenas a primeras parecen fantásticas y totalmente extrañas, después uno les encuentra enseguida resonancias muy antiguas y llegan a convertirse en algo casi familiar. Mi programador (y, cada vez más, uno de mis socios) entra en el ordenador ecuaciones de apariencia anodina. Y, alternativamente, va saliendo en la pantalla toda una fauna, ora realista, ora de ensueño o de pesadilla. Siempre es un impacto estético inolvidable, que se despierta cada vez que presentamos nuestros descubrimientos a una audiencia desprevenida. Gracias al progreso del diseño asistido por ordenador —y en especial gracias al color— se ve ampliarse la gama de las fractales que razonablemente se pueden ilustrar, y la riqueza estética no presenta ningún síntoma de agotamiento. Por otra parte, las imitaciones fractales del relieve se hacen día a día más realistas, sin que haya que recurrir a fórmulas verdaderamente más complicadas. Desafortunadamente, el formato de este libro no permite dar ni tan siquiera una idea de estas riquezas y me veo obligado a remitir al lector a otros trabajos. Por ejemplo, mi artículo del número de marzo de 1983 de la revista «Le Débat» (Gallimard) desarrolla el aspecto estético y lo ilustra en color.

Es sorprendente y digno de ser notado que este aspecto gráfico no es consecuencia de haberlo buscado, sino que llega como una «prima» completamente inesperada, que acompaña unos éxitos en la investigación científica.

Desde la primera edición de este libro, los artículos de investigación acerca de las fractales han proliferado. Muchos salieron de mi pluma, y me he permitido incluir una lista de ellos en la bibliografía. Una proporción que ha crecido rápidamente procede de otros autores, pero es tarde para intentar tan siquiera hacer un inventario.

Varios libros sobre fractales y varios artículos de introducción han aparecido

después de 1975; por ellos es por donde hay que empezar el estudio en profundidad de esta nueva disciplina, y donde se encontrarán otras bibliografías.

Entre mis artículos de divulgación en francés, además del ya citado de «Le Débat», hay que señalar un capítulo del libro *Penser les Mathématiques* (Le Seuil, 1982. Versión española: *Pensar la matemática*, AA.VV., Tusquets Editores, 1984, «Cuadernos Infimos», n.º 114, págs. 111-138).

Entre los libros, mi ensayo de 1977, *Fractals; form, chance and dimension*, pretendía ser una traducción de *Les objets fractals* de 1975, pero creció, convirtiéndose en una nueva versión. Cuando se agotó la cuarta reimpression, no se volvió a reimprimir. No lo recomiendo, a menos que su sucesor de 1982 sea inaccesible.

Mi ensayo *The Fractal Geometry of Nature*, aparecido en agosto de 1982 trata de muchos temas que no tienen referencia en estos *Objets fractals*, y algunos capítulos corresponden a trabajos que no estaban concluidos. En particular, el Capítulo 19 debe completarse con Mandelbrot 1983p, 1984k y 1985q.n. Las reuniones científicas dedicadas por completo a las fractales y las sesiones especiales en congresos dedicados a un fin más amplio ya no se cuentan. Muchas de ellas han dado lugar a *Actas* de las que se proporciona unas listas en la pág. 198.

\* \* \*

Esta obra no habría salido a la luz sin las invitaciones, el apoyo y la ayuda de numerosos organismos y personas.

El Collège de France me hizo el honor de pedirme que expusiera el estado de mis ideas en enero de 1973 y en enero de 1974. Al invitarme, los señores A. Lichnerowicz y J. C. Pecker me han animado a organizar lo que entonces no podía parecer sino un cajón de sastre, y este libro puede ser considerado como una redacción completada de mis lecciones del Collège.

Este libro describe trabajos realizados en el Thomas J. Watson Research Center de la International Business Machines Corporation, Yorktown Heights, N. Y. Por medio del señor R. E. Gomory, hoy Director de Investigaciones, IBM decidió proveerme de los medios necesarios para emprender estos trabajos, y con el paso de los años continúa sosteniéndolos en la medida de las necesidades.

La mayoría de las ilustraciones han sido realizadas mediante ordenadores, usando programas de H. Lewitan, de J. L. Oneto y sobre todo de S. W. Handelman, y técnicas puestas a punto por P. G. Capek y A. Appel.

A. Mandelbrot, L. Mandelbrot, C. Vannimendus y J. S. Lourie se han encargado amablemente de limpiar el texto de anglicismos y expresiones poco claras.

F. Mer, F. Legrand, A. M. Benilan, M. Roullé y C. A. McMullin se han repartido la tarea de descifrar manuscritos difíciles del texto de 1975, y de hacerlos entrar en un sistema (que era aún experimental) de tipografía por ordenador. En 1984 y 1986 todas estas tareas han sido reemprendidas por J. T. Riznychok.

## REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA

La siguiente lista incluye los textos a los que este libro hace referencia explícita y una selección de trabajos del autor. He añadido algunos otros trabajos recientes acerca de las fractales, pero sólo a título indicativo y sin la menor pretensión, ni en lo que se refiere al equilibrio ni a la exhaustividad.

Cada referencia comprende uno o varios nombres, una fecha y también (cuando es necesario) una letra de identificación, que no es necesariamente a, b, c, etc., sino que es distinta cada vez, intentando evocar el título de la colección en la que ha aparecido el trabajo en cuestión.

### LIBROS DEDICADOS A LOS FRACTALES

\* El asterisco indica las actas de una conferencia o simposium, cuya fecha y localidad se señalan entre paréntesis.

FALCONER, H. E. 1985 *The Geometry of Fractal Sets*. Cambridge UK: Cambridge University Press.

ELDER, J. & JOSSANG, I. 1986 *Fractals: Modeling and Simulation*. Department de Physique de l'Université d'Oslo.

MANDELBROT, B. B. 1977f. *Fractals: Form, Chance and Dimension*. San Francisco: W. H. Freeman & Co.

MANDELBROT, B. B. 1982g. *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman (han aparecido traducciones en japonés y alemán).

\*MANDELBROT, B. B., et al. 1984, 1985, 1986. *Fractal Aspects of Materials*. (Extended Abstracts) (Boston, 1984, 1985, 1986) Pittsburgh PA: The Materials Research Society.

MANDELBROT, B. B. 1986. *Entretiens* (título provisional). Milano: Montedison, 1986 ou 1987.

\*MAYER-KRESS, G. 1986. *Dimensions and Entropies in Chaotic Systems*. (Pecos River, 1985) New York: Springer.

PEITGEN, H. O. & RICHTER, P. H. 1986. *The Beauty of Fractals*. New York: Springer.

\*PIETRONERO, I. & TOSATTI, E. 1986. *Fractals in Physics*. (Trieste, 1985) Amsterdam: North-Holland.

\*PYNN, R. & SKJELTORP, A. 1985. *Scaling Phenomena in Disordered Systems*. (Geilo, 1985) New York: Plenum.

\*SHUESINGER, M. E. et al. 1984. *Fractals in the Physical Sciences*. (Gaithersburg, 1983) Journal of Statistical Physics, 36, 516.

\*STANLEY, H. E. & OSTROWSKY, N. 1986. *On Growth and Form: Fractal and Non Fractal Patterns in Physics*. (Cargèse, 1985) Boston & Dordrecht: Nijhoff-Kluwer.

STEWART, I. 1982. *Les fractals*. Paris: Berlin.

TAKAYASU, H. 1985. *Les fractales* (en japonés). Tokyo:

YOSHINARL, M. 1986. *Entre la Science et l'art: l'esthétique fractale est née* (en japonais). Tokyo.

### OTROS TRABAJOS

- ABBOT, L. F. & WISE, M. B. 1981. Dimension of a quantum-mechanical path. *American J. of Physics* 49, 37-39.
- AGTENBERG, F. P. 1982. Recent developments in geomathematics. *Geo-processing* 2.
- AHARONY, A. 1984. Percolation, fractals and anomalous diffusion. *J. Statistical Physics* 34.
- ALEXANDER, S. & ORBACH, R. 1982. Density of states on fractals: «fractons». *J. de Physique; Lettres* 43, 625.
- ANDREWS, D. J. 1980-1981. A stochastic fault model. I Static case, II Time-dependent case. *J. of Geophysical Research* 85B, 3867-3877 & 86B, 10821-10834.
- APOSTEL, L., MANDELBROT, B. B. & MORF, A. 1957. *Logique, langage et théorie de l'information*. Paris: Presses Universitaires de France.
- ARTHUR, D. W. G. 1954. The distribution of lunar craters. *J. of the British Astronomical Association* 64, 127-132.
- BACHELIER, L. 1900. *Théorie de la spéculation*. Thèse pour le Doctorat ès Sciences Mathématiques, soutenue le 29 mars 1900. *Annales Scientifiques de l'école Normale Supérieure* III-17, 21-86. Traducción en *The random character of stock market prices*. Ed. P. H. Cootner, 17-78. Cambridge, MA: MIT Press, 1964.
- BACHELIER, L. 1914. *Le jeu, la chance et le hasard*. Flammarion.
- BARBER, M. N. & NINHAM, B. W. 1970. *Random and restricted walks: theory and applications*. New York: Gordon & Breach.
- BARENBLATT, G. I. 1982. *Similarité, self-similarité, etc.* 2ème édition Moscou: Mir.
- BERGER, J. M. & MANDELBROT, B. B. 1963. A new model for the clustering of errors on telephone circuits. *IBM J. of Research and Development* 7, 224-236.
- BERRY, M. V. 1978. Catastrophe and fractal regimes in random waves & Distribution of nodes in fractal resonators. *Structural stability in physics*. Ed. W. Güttinger, New York: Springer.
- BERRY, M. V. 1979. Diffractals. *J. of Physics* A12, 781-797.
- BERRY, M. V. & HANNAY, J. H. 1978. Topography of random surfaces. *Nature* 273, 573.
- BERRY, M. V. & LEWIS, Z. V. 1980. On the Weierstrass-Mandelbrot fractal function. *Pr. of the Royal Society London* A370, 459-484.
- BESICOVITCH, A. S. 1934. On rational approximation to real numbers. *J. of the London Mathematical Society* 9, 126-131.
- BESICOVITCH, A. S. 1935. On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system (On sets of fractional dimensions II). *Mathematische Annalen* 110, 321-330.
- BIDAUX, R., BOCCARA, N., SARMA, G., SÈZE, L., DE GENNES, P. G. & PARODI, O. 1973. Statistical properties of focal conic textures in smectic liquid crystals. *Le J. de Physique* 34, 661-672.
- BIENAYMÉ, J. 1853. Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés. *Comptes Rendus* (Paris) 37, 309-329.
- BILLINGSLEY, P. 1967. *Ergodic theory and information*. New York: Wiley.

- BLUMENTHAL, L. M. & MENGER, K. 1970. *Studies in geometry*. San Francisco: W. H. Freeman.
- BONDI, H. 1952; 1960. *Cosmology*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- BOREL, E. 1922. Définition arithmétique d'une distribution de masses s'étendant à l'infini et quasi périodique, avec une densité moyenne nulle. *Comptes Rendus (Pans)* 174, 977-979. Ver *Oeuvres de Emile Borel*. Paris: Editions du CNRS, 1972.
- BOULIGAND, G. 1928. Ensembles impropres et nombre dimensionnel. *Bulletin des Sciences Mathématiques* 11-52, 320-334 & 361-376.
- BOULIGAND, G. 1929. Sur la notion d'ordre de mesure d'un ensemble flan. *Bulletin des Sciences Mathématiques* U-53, 185-192.
- BURKS, A. W. (Ed.) 1970. *Essays on Cellular Automata*. Urbana, IL: University of Illinois Press.
- BURROUGH, P. A. 1981. Fractal dimensions of landscapes and other environmental data. *Nature* 294, 240-242.
- CAFFARELLI, L., KOHN, R. & NIRENBERG, L. 1982. Partial regularity of suitable weak solutions of Navier-Stokes equations. *Communications in Pure and Applied Mathematics* 35, 771-831.
- CANTOR, G. 1872. Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der Trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen* 5, 123-132.
- CANTOR, G. 1883. Grundlagen einer allgemeinen Mannichfältigkeitslehre. *Mathematische Annalen* 21, 545-591. Ver Cantor 1932. Traducción francesa: *Acta Mathematica* 2, 381-408.
- CANTOR, G. 1932. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Ed. E. Zermelo. Berlin: Teubner.
- CESÀRO, E. 1905. Remarques sur la courbe de von Koch. *Atti della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli* XII, 1-12. Ver Cesàro *Opere scelte*. Rome: Edizioni Cremonese, II, 464-479.
- CHANDRASEKHAR, S. 1943. Stochastic problems in physics and astronomy. *Reviews of Modern Physics* 15, 1-89. Reproduit dans *Noise and Stochastic Processes*. Ed. N. Wax. New York: Dover.
- CHARLIER, C. V. L. 1908. Wie eine unendliche Welt aufgebaut sein kann. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik* 4, 1-15.
- CHARLIER, C. V. L. 1922. How an infinite world may be built up. *Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik* 16, 1-34.
- CHORIN, A. J. 1981. Estimates of intermittency, spectra, and blow up in developed turbulence. *Communications in Pure and Applied Mathematics* 34, 853-866.
- CHORIN, A. J. 1982a. The evolution of a turbulent vortex. *Communications in Mathematical Physics* 83, 517-535.
- COOTNER, P. H. (Ed.) 1964. *The random character of stock market prices*. Cambridge, MA: M.I.T. Press.
- DAMERAU, F. J. & MANDÉLBROT, B. B. 1973. Tests of the degree of word clustering in written English. *Linguistics* 102, 58-75.
- DAVIS, C. & KNUTH, D. E. 1970. Number representations and dragon curves. *J. of Recreational Mathematics* 3, 66-81 & 133-149.
- DEKKING, F. M. 1982. Recurrent sets. *Advances in Mathematics* 44, 78-104.
- DEUTSCHER, G., ZALLEN, R., & ADLER, J. 1983. Percolation Structures and Processes, *Annals Israel Physical Society* 5.

- DOMB, C. 1964. Some statistical problems connected with crystal lattices. *J. of the Royal Statistical Society* 26B, 367-397.
- DOMB, C., GILLIS, J. & WILMERS, G. 1965. On the shape and configuration of polymer molecules. *Pr. of the Physical Society* 85, 625-645.
- DOUADY, A. & HUBBARD, J. H. 1982. Itération des polynômes quadratiques complexes. *Comptes Rendus (Paris)* 294-1, 123-126.
- DUMOUCHEL, W. H. 1973, 1975. Stable distributions in statistical inference: *J. of the American Statistical Association* 68, 469-482 & 70, 386-393.
- DUTTA, P. & HORN, P. M. 1981. Low-frequency fluctuation in solids: 1/f noise. *Reviews of Modern Physics* 53, 497-516.
- EGGLESTON, H. G. 1953. On closest packing by equilateral triangles. *Pr. of the Cambridge Philosophical Society* 49, 26-30.
- EL HÉLOU, Y. 1978. Recouvrement du tore par des ouverts aléatoires et dimension de Hausdorff de l'ensemble non recouvert. *Comptes Rendus (Paris)* 287A, 815-818.
- FAMA, E. F. 1963. Mandelbrot and the stable Paretian hypothesis. *J. of Business (Chicago)* 36, 420-429. Reproducido en *The Random Character of Stock Market Prices*. Ed. P. H. Cootner. Cambridge, MA: MIT Press.
- FAMA, E. F. 1965. The behavior of stock-market prices. *J. of Business* 38, 34-105. Basado en una Tèse de l'Université de Chicago, titulada *The distribution of daily differences of stock prices: a test of Mandelbrot's stable Paretian hypothesis*.
- FAMA, E. F. & BLUME, M. 1966. Filter rules and stock-market trading. *J of Business (Chicago)* 39, 226-241.
- FEDERER, h. 1969. *Geometric measure theory*. New York: Springer.
- FELLER, W. 1950-1957-1968. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. 1. New York: Wiley.
- FELLER, W. 1966-1971. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. 2. New York: Wiley.
- FISHER, M. H. 1967. The theory of condensation and the critical point. *Physics* 3. 255-283.
- FOURNIER D'ALBE, E. F. 1907. *Two new worlds: I The infra world; II The supra world*. London: Longmans Green.
- FRÉCHET, M. 1941. Sur la loi de répartition de certaines grandeurs géographiques. *J. de la Société de Statistique de Paris* 82, 114-122.
- GAMOW, G. 1954. Modern cosmology. *Scientific American* 190 (March) 54-63. Reproducido en Munitz (Ed.) 1957, 390-404.
- GARDNER, M. 1967. An array of problems that can be solved with elementary mathematical techniques. *Scientific American* 216 (March, April and June issues). También en Gardner *Mathematical magic show*. New York: Knopf. 1977, pp. 207-209 & 215-220. Existe una traducción castellana en A.E. El libro de bolsillo n.º 1023 Madrid 1984.
- GARDNER, M. 1976. In which «monster» curves force redefinition of the word «curve». *Scientific American* 235 (December issue), 124-133.
- GEFEN, Y., AHARONY, A. & MANDELBROT, B. B. 1983. Phase transitions on fractals: I. Quasi-linear lattices. *J. of Physics A* 16, 1267-1278.
- GEFEN, Y., AHARONY, A., MANDELBROT, B. B. & SHAPIR, Y. 1984. Phase transitions on fractals: II. Sierpinski gaskets. *J. of Physics A* 17, 435-444.
- GEFEN, Y., AHARONY, A., & MANDELBROT, B. B. 1984. Phase transitions on Fractals: III. Infinitely ramified lattices. *J. of Physics A* 17, 1277-1289.

- GEFEN, Y., AHARONY, A., MANDELBROT, B. B. & KIRKPATRICK, S. 1981. Solvable fractal family, and its possible relation to the backbone at percolation. *Physical Review Letters* 47, 1771-1774.
- GEFEN, Y., AHARONY, A. & ALEXANDER, S. 1983. *Physical Review Letters* 50, 77.
- GEFEN, Y., MANDELBROT, B. B. & AHARONY, A. 1980. Critical phenomena on fractals. *Physical Review Letters* 45, 855-858.
- GEFEN, Y., MEIR, Y., MANDELBROT, B. B. & AHARONY, A. 1983. Geometric implementation of hypercubic lattices with noninteger dimensionality, using low lacunarity fractal lattices. *Physical Review Letters* 50, 145-148.
- GELBAUM, B. R. & OLMSTED, J. M. H. 1964. *Counter examples in analysis*. San Francisco: Holden-Day.
- GERNSTEIN, G. L. & MANDELBROT, B. B. 1964. Random walk models for the spike activity of a single neuron. *The Biophysical J.* 4, 41-68.
- GILBERT, W. T. 1982. Fractal geometry derived from complex bases. *Mathematical Intelligencer* 4, 78-86.
- GIVEN, J. A. & MANDELBROT, B. B. 1983. Diffusion on fractal lattices and the fractal Einstein relation. *J. Physics A* 16, L565-L569.
- GNEDENKO, B. V. & KOLMOGOROV, A. N. 1954. *Limit distributions for sums of independent random variables*. Trans. K. L. Chung. Reading, MA: Addison Wesley.
- GUMOWSKI, I. & MIRA, C. 1980. *Dynamique chaotique*. Toulouse: Capadues.
- HALLEY, J. W. & MAI, T. 1979. Numerical estimates of the Hausdorff dimension of the largest cluster and its backbone in the percolation problem in two dimensions. *Physical Review Letters* 43, 740-743.
- HANDELMAN, S. W. 1980. A high-resolution computer graphics system. *IBM Systems J.* 19, 356-366.
- HARBISON, R. J., BISHOP, G. J. & OLINN, G. P. 1978. Spanning lengths of percolation clusters. *J. of Statistical Physics* 19, 53-64.
- HARTER, W. G. 1979-1981. Theory of hyperfine and superfine links in symmetric polyatomic molecules. I Trigonal and tetrahedral molecules. II Elementary cases in octahedral hexafluoride molecules *Physical Review A* 19, pp. 2277-2303 & A2 4, pp. 192-263.
- HATLEE, M. D. & KOZAK, J. J. 1981. Stochastic flows in integral and fractal dimensions and morphogenesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* 78, 972-975.
- HAUSDORFF, F. 1919. Dimension und á usseres Mass. *Mathematische Annalen* 79, 157-179.
- HAWKING, S. W. 1978. Spacetime foam. *Nuclear Physics B* 144, 349-362.
- HEIDMANN, J. 1973. *Introduction à la cosmologie*. Paris: Presses Universitaires de France.
- HENTSCHEL, H. G. E. & PROCACCIA, I. 1982. Intermittency exponent in fractally homogeneous turbulence. *Physical Review Letters* 49, 1158-1161.
- HENTSCHEL, H. G. E. & PROCACCIA, I. 1983. Fractal nature of turbulence as manifested in turbulent diffusion. *Physical Review A* 27, 1266-1269.
- HENTSCHEL, H. G. E. & PROCACCIA, I. 1984. Relative diffusion in turbulent media: the fractal dimension of clouds. *Physical Review A* 29, 1461-1470.
- HERMITE, C. & STIELTJES, T. J. 1905. *Correspondance d'Hermite et de*

- Stieltjes*. 2 vols. Ed. B. Baillaud & H. Bourget. Paris: Gauthier-Villars.
- HOYLE, F. 1953. On the fragmentation of gas clouds into galaxies and stars. *Astrophysical J.* 118, 513-528.
- HUGHES, B. D., MONTROLL, E. W. & SHLESINGER, M. F. 1982. Fractal random walks. *Journal of Statistical Physics* 28, 111-126.
- HUREWICZ, W. & WALLMAN, H. 1941. *Dimension theory*. Princeton University Press.
- HURST, H. E., BLACK, R. P., & SIMAIKA, Y. M. 1965. *Long-term storage, an experimental study*. London: Constable.
- HUTCHINSON, J. E. 1981. Fractals and self-similarity, *Indiana University Mathematics J.* 30, 713-747.
- JAKEMAN, E. 1982. Scattering by a corrugated random surface with fractal slope. *Physics A* 15, L55-L59.
- JAKI, S. L. 1969. *The paradox of Olber's paradox*. New York: Herder & Herder.
- JEANS, J. H. 1929. *Astronomy and cosmogony*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, (reimpreso por Dover).
- KAC. M. Recollections concerning Peano curves and statistical independence. *Probability, Number Theory and Statistical Physics (Selected Papers)*, Cambridge, MA: M.I.T. Press, ix-xiii.
- KAGAN, Y. Y. & KNOPOFF L. 1978. Statistical study of the occurrence of shallow earthquakes. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 55, 67-86.
- KAGAN, Y. Y. & KNOPOFF. L. 1980. Spatial distribution of earthquakes: the two-point correlation function. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 62, 303-320.
- KAHANE. J. P. 1969. Trois notes sur les ensembles parfaits linéaires. *Enseignement mathématique* 15, 185-192.
- KAHANE. J. P. 1970. Courbes étranges, ensembles minces. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* 49, 325-339.
- KAHANE. J. P. 1971. The technique of using random measures an random sets in harmonic analysis. *Advances in Probability and Related Topics*, Hd. P. Ner. 1, 65-101. New York: Marcèl Dekker.
- KAHANE, J. P. 1974. Sur le modèle de turbulence de Benoît Mandelbrot, *Comptes Rendus (París)* 278A, 621-623.
- KAHANE, J. P. & mandelbrot, B. B. 1965. Ensembles de multiplicité aléatoires. *Comptes Rendus (Pans)* 261, 3931-3933.
- KAHANE, J. P. & PEYRIÈRE, J. 1976. Sur certaines martingales de B. mandelbrot, *Advances in Mathematics* 22, 131-145.
- KAHANE. J. P. & SALI, M. R. 1963. *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*. Paris: Hermann.
- KAHANE, J. P 1976. Mesures et dimensions. *Turbulence and Navier-Stokes Equations* (Ed. R. Temam) Lecture Notes in Mathematics 565, 94-103, New York: Springer.
- KAPITULNIK, A. & DEUTSCHER. G. 1982. Percolation characteristics in discontinuous thin films of Pb. *Physical Review Letters* 49, 1444-1448.
- KAPITULNIK. A., AHARONY, A., DEUTSCHER, G. & STAUFFER, D. 1983. Self-similarity and correlation in percolation. *Physical Review Letters* 49, 1444-1448.
- KAYE, B. H. 1978. Specification of ruggedness and/or texture of a fine particle

profile by its fractal dimension. *Powder Technology* 21, 1-16.

KAYE, B. H. 1983. Fractal description of fine particle systems. *Modern Methods in Fineparticle Characterization* (Ed. J. K. Beddow) Boca Raton, FL: CRC Press.

VON KOCH, H. 1904. Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire. *Arkiv for Matematik, Astronomioch Fysik* 1, 681-704.

VON KOCH, H. 1906. Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes. *Acta Mathematica* 30, 145-174.

KOLMOGOROV, A. N. 1941. Local structure of turbulence in an incompressible liquid for very large Reynolds numbers. *Comptes Rendus (Doklady) Académie des Sciences de l'URSS (N.S.)* 30, 299-303.

KOLMOGOROV, A. N. 1962. A refinement of previous hypothesis concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J. of Fluid Mechanics* 13, 82-85.

KOLMOGOROV, A. N. & TIHOMIROV, V. M. 1959-1961. Epsilonentropy and epsilon-capacity of sets in functional spaces. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk (N.S.)* 14, 3-86. Traducción en *American Mathematical Society Translations (Series 2)* 17, 277-364.

KORCAK, J. 1938. Deux types fondamentaux de distribution statistique. *Bulletin de l'Institut International de Statistique* III, 295-299.

LANDMAN, B. N. & RUSSO, R. L. 1971. On a pin versus block relationship for partitions of logic graphs. *IEEE Tr. on Computers* 20, 1469-1479.

LE MEHAUTE, A. & CREPY, G. 1982. Sur quelques propriétés de transferts électrochimiques en géométrie fractale. *Comptes Rendus (Paris)* 294-II, 685-688.

LEFFEUVRE, J. 1980. Teleological optimization of a fractal tree model of the pulmonary vascular bed. *Bulletin Européen de physiopathologie respiratoire* 16, 53.

LEVY, P. 1925. *Calcul des probabilités*. Paris: Gauthier Villars.

LEVY, P. 1930. Sur la possibilité d'un univers de masse infinie. *Annales de Physique* 14, 184-189. Ver Lévy 1973-11, 534-540.

LEVY, P. 1937-1954. *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. Pans: Gauthier Villars.

LEVY, P. 1948-1965. *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Pans: Gauthier-Villars.

LEVY, P. 1970. *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien*. Paris: Albert Blanchard.

LEVY, P. 1973. *Oeuvres de Paul Lévy*. Ed. D. Dugué, P. Deheuvels & M. Ibéro. Paris: Gauthier Villars.

LOVEJOY, S. 1981. A statistical analysis of rain areas in terms of fractals. *Preprints*. 20th Conference on Radar Meteorology. A.M.S., Boston, 476-483.

LOVEJOY, S. 1982. Area-perimeter relation for rain and doud areas. *Science* 216, 185-187.

LOVEJOY, S. & MANDELBROT, B. B. 1985. Fractal properties of rain, and a fractal model. *Tellus*, 37A, 209-232.

LYDALL, H. F. 1959. The distribution of employment income. *Econometrica* 27, 110-115.

MANDELBROT, B. B. 1951. Adaptation d'un message à la ligne de transmission. I & II. *Comptes Rendus (Paris)* 232, 1638-1640 & 2003-2005.

MANDELBROT, B. B. 1953t. Contribution à la théorie mathématique des jeux de

communication (Thèse de Doctorat ès Sciences Mathématiques). *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris* 2, 1-124.

MANDELBROT, B. B. 1954w. Structure formelle des textes et communication (deux études). *Word* 10, 1-27. Correcciones. *Word* 11, 424.

MANDELBROT, B. B. 1955b. On recurrent noise limiting coding. *Information Net works*, the Brooklyn Polytechnic Institute Symposium, 205-221. *New York: Interscience*.

MANDELBROT, B. B. 1956c. La distribution de Willis-Yule, relative au nombre d'espèces dans les genres taxonomiques. *Comptes Rendus (Pans)* 242, 2223-2225.

MANDELBROT, B. B. 1956i. On the language of taxonomy: an outline of a thermostatistical theory of systems of categories, with Willis (natural) structure. *Information Theory, the Third London Symposium*. Ed. C. Cherry. 135-145. New York: Academic.

MANDELBROT, B. B. 1956t. Exhaustivité de l'énergie d'un système, pour l'estimation de sa temperature. *Comptes Rendus (Pans)* 243, 1835-1837.

MANDELBROT, B. B. 1956m. A purely phenomenological theory of statistical thermodynamics: canonical ensembles. *IRE Tr. on Information Theory* 112, 190-203.

MANDELBROT, B. B. 1959g. Ensembles grand canoniques de Gibbs; justification de leur unicité basée sur la divisibilité infinie de leur énergie aléatoire. *Comptes Rendus (Paris)* 249, 1464-1466.

MANDELBROT, B. B. 1959p. Variables et processus stochastiques de Pareto-Lévy et la répartition des revenus, I & II. *Comptes Rendus (Paris)* 249, 613-615 & 2153-2155.

MANDELBROT, B. B. 1960i. The Pareto-Lévy law and the distribution of income. *International Economic Review* I, 79-106.

MANDELBROT, B. B. 1961b. On the theory of word frequencies and on related Markovian models of discourse. *Structures of language and its mathematical aspects*. 120-219. New York: American Mathematical Society.

MANDELBROT, B. B. 1961e. Stable Paretian random functions and the multiplicative variation of income. *Econometrica* 29, 517-543.

MANDELBROT, B. B. 1962c. Sur certains prix spéculatifs: faits empiriques et modèle basé sur les processus stables additifs de Paul Lévy. *Comptes Rendus (Paris)* 254, 3968-3970.

MANDELBROT, B. B. 1962e. Paretian distributions and income maximization. *Quarterly J. of Economics* 76, 57-85.

MANDELBROT, B. B. 1962n. Statistics of natural resources and the law of Pareto. IBM Research Note NC-146, June 29, 1962 (inérito).

MANDELBROT, B. B. 1962t. The role of sufficiency and estimation in thermodynamics. *The Annals of Mathematical Statistics* 33, 1021-1038.

MANDELBROT, B. B. 1963p. The stable Paretian income distribution, when the apparent exponent is near two. *International Economic Review* 4, 111-115.

MANDELBROT, B. B. 1963b. The variation of certain speculative prices. *J. of Business (Chicago)* 36, 394-419. Reproducido en *The random character of stock market prices*. Ed. P. H. Cootner, 297-337. Cambridge, MA: MIT Press.

MANDELBROT, B. B. 1963e. *New methods in statistical economics*. *J. of Political Economy* 71, 421-440. Reproducido en *Bulletin of the International Statistical Institute, Ottawa Session: 40 (2)*, 669-720.

MANDELBROT, B. B. 1964j. The epistemology of chance in certain newer sciences. *The Jerusalem International Congress on Logic, Methodology and the Philosophy*

of Science (inérito).

MANDELBROT, B. B. 1964t. Derivation of statistical thermodynamics from purely phenomenological principles. *J. of Mathematical Physics* 5, 164-171.

MANDELBROT, B. B. 1964o. Random walks, fire damage amount, and other Paretian risk phenomena. *Operations Research* 12, 582-585.

MANDELBROT, B. B. 1964s. *Self-similar random processes and the range* IBM Research Report RC-1163, April 13, 1964 (inérito).

MANDELBROT, B. B. 1965c. Self similar error clusters in communications systems and the concept of conditional stationarity. *IEEE Tr. on Communications Technology* 13, 71-90.

MANDELBROT, B. B. 1965h. Une classe de processus stochastiques homothétiques à soi; application à la loi climatologique de H. E. Hurst. *Comptes Rendus (Paris)* 260, 3274-3277.

MANDELBROT, B. B. 1965s. Leo Szilard and unique decipherability. *IEEE Tr. on Information Theory* IT-11, 455-456.

MANDELBROT, B. B. 1965z. Information theory and psycholinguistics. *Scientific Psychology: Principles and Approaches*, Ed. B. B. Wolman & E. N. Nagel. New York: Basic Books 550-562. Reproducido en *Language, Selected Readings*. Ed. R. C. Oldfield & J. C. Marshall. London: Penguin. Reproducido con apéndices en *Readings in Mathematical Social Science*. Ed. P. Lazarfeld and N. Henry. Chicago, III.: Science Research Associates (1966: hardcover). Cambridge, MA: M.I.T. Press (1968: paperback).

MANDELBROT, B. B. 1966b. Forecasts of future prices, unbiased markets, and «martingale» models. *J. of Business (Chicago)* 39, 242-255. Errata en un número ulterior de este Journal.

MANDELBROT, B. B. 1967b. Sporadic random functions and conditional spectral analysis; self-similar examples and limits. *Pr. of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* 3, 155-179. Berkeley: University of California Press.

MANDELBROT, B. B. 1967k. Sporadic turbulence. *Boundary Layers and Turbulence* (Kyoto International Symposium, 1966), *Supplement to Physics of Fluids* 10, S302-S303.

MANDELBROT, B. B. 1967j. The variation of some other speculative prices. *J. of Business (Chicago)* 40, 393-413.

MANDELBROT, B. B. 1967p. Sur l'épistémologie du hasard dans les sciences sociales: invariance des lois et vérification des hypothèses, *Encyclopédie de la Pléiade: Logique et Connaissance Scientifique*. Ed. J. Piaget. 1097-1113. Paris: Gallimard.

MANDELBROT, B. B. 1967s. How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science* 155, 636-638.

MANDELBROT, B. B. 1967i. Some noises with  $1//$  spectrum\* a bridge between direct current and white noise. *IEEE Tr. on Information Theory* 13, 289-298.

MANDELBROT, B. B. 1968p. Les constantes chiffrées du discours. *Encyclopédie de la Pléiade: Linguistique* textos remitidos por J. Martinet, Gallimard, 46-56.

MANDELBROT, B. B. 1969e. Long-run linearity, locally Gaussian process, H-spectra and infinite variance. *International Economic Review* 10, 82-111.

MANDELBROT, B. B. 1970p. On negative temperature for discourse. Discussion of a paper by Prof. N. F. Ramsey. *Critical Review of Thermodynamics*, 230-232. Baltimore, MD: Mono Book.

- MANDELBROT, B. B. 1970e. Statistical dependence in prices and interest rates. *Papers of the Second World Congress of the Econometric Society*, Cambridge, England (8-14 Sept. 1970).
- MANDELBROT, B. B. 1970y. *Statistical Self Similarity and Very Erratic Chance Fluctuations*. Trumbull Lectures, Yale University (inédito).
- MANDELBROT, B. B. 1971e. When can price be arbitrated efficiently? A limit to the validity of the random walk and martingale models. *Review of Economics and Statistics* LIII, 225-236.
- MANDELBROT, B. B. 1971f. A fast fractional Gaussian noise generator. *Water Resources Research* 7, 543-553. ERRATUM IMPORTANT: En la primera fracción de la p. 545, hay que borrar el 1 del numerador y añadirlo a la fracción.
- MANDELBROT, B. B. 1971n. *The conditional cosmographie principle and the fractional dimension of the universe* (inédito involuntario).
- MANDELBROT, B. B. 1972d. On Dvoretzky coverings for the circle. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie* 22, 158-160.
- MANDELBROT, B. B. 1972j. Possible refinement of the log normal hypothesis concerning the distribution of energy dissipation in intermittent turbulence in *Statistical models and turbulence*. Edited by Murray M. Rosenblatt and C. Van Atta. Proceedings of a conference held in La Jolla CA. Lecture Notes in Physics 12 333-351. New York: Springer.
- MANDELBROT, B. B. 1972b. Correction of an error in «The variation of certain speculative prices (1963)». *J. of Business* 40, 542-543.
- MANDELBROT, B. B. 1972c. Statistical methodology for nonperiodic cycles: from the covariance to the R/S analysis. *Annals of Economic and Social Measurement* 1, 259-290.
- MANDELBROT, B. B. 1972w. Broken line process derived as an approximation to fractional noise. *Water Resources Research* 8, 1354-1356.
- MANDELBROT, B. B. 1972z. Renewal sets and random cutout. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie* 22, 145-157.
- MANDELBROT, B. B. 1973c. Comments on «A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices», by Peter K. Clark. *Econometrica* 41, 157-160.
- MANDELBROT, B. B. 1973f. Formes nouvelles du hasard dans les sciences. *Economie Appliquée* 26, 307-319.
- MANDELBROT, B. B. 1973j. Le problème de la réalité des cycles lents, et le syndrome de Joseph. *Economie Appliquée* 26, 349-365.
- MANDELBROT, B. B. 1973v. Le syndrome de la variance infinie, et ses rapports avec la discontinuité des prix. *Economie Appliquée* 26, 321-348.
- MANDELBROT, B. B. 1974c. Multiplications aléatoires itérées, et distributions invariantes par moyenne pondérée. *Comptes Rendus* (Paris) 278A, 289-292 & 355-358.
- MANDELBROT, B. B. 1974d. A population birth and mutation process. I: Explicit distributions for the number of mutants in an old culture of bacteria. *J. of Applied Probability* 11, 437-444. (La parte II es un texto que se distribuye a petition).
- MANDELBROT, B. B. 1974f. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier. *J. of Fluid Mechanics* 62, 331-358.
- MANDELBROT, B. B. 1975b. Fonctions aléatoires pluritemporelles: approximation poissonienne du cas brownien et généralisations. *Comptes Rendus* (Paris)

280A, 1075-1078.

MANDELBROT, B. B. 1975f. On the geometry of homogeneous turbulence, with stress on the fractal dimension of the iso-surfaces of scalars. *J. of Fluid Mechanics* 72, 401-416.

MANDELBROT, B. B. 1975m. Hasards et tourbillons: quatre contes à clef. *Annales des Mines* (November), 61-66.

MANDELBROT, B. B. 1975o. *Les objets fractals: forme, hasard et dimension*. Flammarion.

MANDELBROT, B. B. 1975u. Sur un modèle décomposable d'univers hiérarchisé: déduction des corrélations galactiques sur la sphère céleste. *Comptes Rendus* (Paris) 280A, 1551-1554.

MANDELBROT, B. B. 1975w. Stochastic models for the Earth's relief, the shape and the fractal dimension of the coastlines, and the number-area rule for islands. *Pr. of the National Academy of Sciences USA* 72, 3825-3828.

MANDELBROT, B. B. 1975h. Limit theorems on the self-normalized range for weakly and strongly dependent processes. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie* 31, 271 - 285.

MANDELBROT, B. B. 1976c. Géométrie fractale de la turbulence. Dimension de Hausdorff, dispersion et nature des singularités du mouvement des fluides. *Comptes Rendus* (Paris) 282A, 119-120.

MANDELBROT, B. B. 1976o. Intermittent turbulence & fractal dimension: kurtosis and the spectral exponent  $5/3+B$ . *Turbulence and Navier Stokes Equations* (Conference held at Orsay in 1975). Ed. R. Teman, *Lecture Notes in Mathematics* 565, 121-145. New York: Springer.

MANDELBROT, B. B. 1977b. Fractals and turbulence: attractors and dispersion. *Turbulence Seminar Berkeley 1976/1977*. Ed. P. Bernard & T. Ratiu. *Lecture Notes in Mathematics* 615, 83-93. New York: Springer.

MANDELBROT, B. B. 1977h. Geometric facets of statistical physics: scaling and fractals. *Statistical Physics 13*, IUPAP Conference, Haifa 1977. Edited by D. Cabib et al. *Annals of the Israel Physical Society*. 225-233.

MANDELBROT, B. B. 1978b. The fractal geometry of trees and other natural phenomena. *Buffon Bicentenary Symposium on Geometrical Probability*. Ed. R. Miles & J. Serra. *Lecture Notes in Biomathematics* 23, 235-249. New York: Springer.

MANDELBROT, B. B. 1978r. Les objets fractals. *La Recherche* 9 1-13.

MANDELBROT, B. B. 1978c. Colliers aléatoires et une alternative aux promenades au hasard sans boucle: les cordonnets discrets et fractals. *Comptes Rendus* (Paris) 286A, 933-936.

MANDELBROT, B. B. 1979n. Comment on bifurcation theory and fractals. *Bifurcation Theory and Applications*, Ed. Gurel & O. Rössler. *Annals of the New York Academy of Sciences* 316, 463-464.

MANDELBROT, B. B. 1979u. Corrélations et texture dans un nouveau modèle d'Univers hiérarchisé, basé sur les ensembles trémas. *Comptes Rendus* (Paris) 288A, 81-83.

MANDELBROT, B. B. 1980b. Fractals and geometry with many scales of length. *Encyclopaedia Britannica 1981 Yearbook of Science and the Future*, 168-181.

MANDELBROT, B. B. 1980n. Fractal aspects of the iteration of  $z \rightarrow \lambda z(1 - z)$  for complex  $X$  and  $z$ . *Non Linear Dynamics*. Edited by R. M. G. Helleman. *Annals of the New York Academy of Sciences* 357, 249-259.

MANDELBROT, B. B. 1981i. Scalebound or scaling shapes: A useful distinction

in the visual arts and in the natural sciences. *Leonardo* 14, 45-47.

MANDELBROT, B. B. 1982c. Comments on computer rendering of fractal stochastic models. *Communications of the Association for Computing Machinery* 25, 581-583.

MANDELBROT, B. B. 1983d. Les fractales, les monstres et la beauté. *Le Débat* 24, 54-72.

MANDELBROT, B. B. 1983m. Self-inverse fractals osculated by sigma discs, and the limit sets of inversion groups. *Mathematical Intelligencer* 5, 2; 9-17.

MANDELBROT, B. B. 1983p. On the quadratic mapping  $Z \rightarrow z^i$  (i for complex and z: the fractal structure of its M-set, and scaling. *Order in Chaos* (Ed. D. Campbell) Amsterdam: North Holland, and *Physica D*, 7, 224-239.

MANDELBROT, B. B. 1984k. On the dynamics of iterated maps VIII: The map  $z \rightarrow z + 1/z$ , from linear to planar chaos, and the measurement of chaos. *Chaos and Statistical Mechanics*. (Kyoto Summer Institute.) Edited by Y. Kuramoto, New York: Springer, 32-41.

MANDELBROT, B. B. 1984e. Fractals and physics: squig clusters, diffusions, fractal measures and the unicity of fractal dimensionality. *Statistical Physics 15, International IUPAP Conference* (Edinburgh, 1983). Edited by David Wallace & Alistair Bruce. *J. of Statistical Physics* 34, 1984, 895-910.

MANDELBROT, B. B. 1984f. Squig sheets and some other squig fractal constructions, followed by Comment on the equivalence between fracton/spectral dimensionality and the dimensionality of recurrence. *Proceedings of the Gaithersburg Conference on Fractals*. Edited by Michael F. Shlesinger, BBM & Robert J. Rubin. *J. of Statistical Physics* 36, 519-545.

MANDELBROT, B. B. 1984w. On fractal geometry and a few of the mathematical questions it has raised. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Warsaw 1983) Edited by Zbigniew Ciesielski, Warsaw: PWN and Amsterdam: North-Holland, 1661-1675.

MANDELBROT, B. B. 1985g. On the dynamics of iterated maps. Paper III: The individual molecules of the M-set: self-similarity properties, the  $N^{-2}$  rule, and the  $N^{-2}$  conjecture. Paper IV: The notion of «normalized radical» R, and the fractal dimension of the boundary of R. Paper V: Conjecture that the boundary of the M-set has a fractal dimension equal to 2. Paper VI: Conjecture that certain Julia sets include smooth components. Paper VII: Domain-filling («Peano») sequences of fractal Julia sets, and an intuitive rationale for the Siegel discs. *Chaos, Fractals and Dynamical Systems* Edited by Pal Fisher & William Smith. New York: Marcel Dekker, 213-253.

MANDELBROT, B. B. 1985n. Continuous interpolation of the complex discrete map  $z$ , and related topics (On the dynamics of iterated maps, IX). *Nobel Foundation Symposium on the Physics of Chaos*. Edited by N. R. Nilsson, *Physica Scripta*. T9, 59-63.

MANDELBROT, B. B. 1985l. Self-affine fractals and fractal dimension. *Physica Scripta*, 32, 257-260.

MANDELBROT, B. B. 1986e. Fractals and fractal dimensions, in *Encyclopedia of Physical Science and Technology*. San Diego, CA: Academic Press.

MANDELBROT, B. B. 1986t. Self-affine fractal sets, I: The basic fractal dimensions, II: Length and area measurements, III: Hausdorff dimension anomalies and their implications. *Fractals in Physics* (Trieste, 1985). Edited by L. Pietronero and Erio Tosatti. North-Holland, 3-28.

MANDELBROT, B. B. 1986p. Fractal measures and multiplicative chaos.

*Dimensions and Entropies in Chaotic System (Workshop held in Pecos River, NM in 1985).*  
Edited by W. Meyer-Kress, Springer, 19-25.

MANDELBROT, B. B., GEFEN, Y., AHARONY, A. & PEYRIÈRE, J. 1985. Fractals, their transfer matrices and their eigen-dimensional sequences. *Journal of Physics A*: 18, 335-354.

MANDELBROT, B. B. & GIVEN, J. S. 1984. Physical properties of a new fractal model of percolation clusters. *Physical Review Letters*, 52, 1853-1856.

MANDELBROT, B. B. & MCCAMY, K. 1970. On the secular pole motion and the Chandler wobble. *Geophysical J.* 21, 217-232.

MANDELBROT, B. B., PASSOJA, D. & PAULLAY, A. 1984. The fractal character of fracture surfaces of metals, *Nature*, 308, 721-722.

MANDELBROT, B. B. & TAYLOR, H. M. 1967. On the distribution of stock price differences. *Operations Research* 15, 1057-1062.

MANDELBROT, B. B. & VAN NESS, J. W. 1968. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review* 10, 422.

MANDELBROT, B. B. & WALLIS, J. R. 1968. Noah, Joseph and operational hydrology. *Water Resources Research* 4, 909-918.

MANDELBROT, B. B. & WALLIS, J. R. 1969a. Computer experiments with fractional Gaussian noises. *Water Resources Research* 5, 228.

MANDELBROT, B. B. & WALLIS, J. R. 1969b. Some long-run properties of geophysical records. *Water Resources Research* 5, 231-340.

MANDELBROT, B. B. & WALLIS, J. R. 1969c. Robustness of the rescaled range R/S in the measurement of noncyclic long run statistical dependence. *Water Resources Research* 5, 967-988. Ver también Apostel, M. & Morf; Berger & M.; Damerau & M.; Gefen, M. & Aharony; Gefen, Aharony, M. & Kirkpatrick; Gefen, Meir, M. & Aharony; Gefen, Aharony, M. & Peyriere; Gerstein & M.; Given & M.; Kahane & M.; Lovejoy & M.; Norton & M.; et Voldman, M. & al.

MARCUS, A. 1964. A stochastic model of the formation and survival of lunar craters, distribution of diameters of clean craters. *Icarus* 3, 460-472.

MENDÈS-FRANCE, M. & TENENBAUM, G. 1981. Dimension des courbes planes, papiers pliés et suites de Rudin-Shapiro. *Bulletin de la Société Mathématique de France* 109, 207-215.

MINKOWSKI, H. 1901 Über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung* 9, 115-121. Reproducido en Minkowski 1911, 2, 122-127.

MINKOWSKI, H. 1911. *Gesammelte Abhandlungen*, Chelsea reprint.

MONIN, A. S. & YAGLOM, A. M. 1971 & 1975. *Statistical fluid mechanics. Volumes 1 and 2.* Cambridge, MA: MIT Press.

MONTROLL, E. W. & SHLESINGER, M. F. 1982. On 1/f noise and other distributions with long tails. *Proceedings of the National Academy of Science of the USA* 79, 3380-3383.

MOORE, E. H. 1900. On certain crinkly curves. *Tr. of the American Mathematical Society* 1, 72-90.

MORI, H. 1980. Fractal dimensions of chaotic flows of autonomous dissipative systems. *Progress of Theoretical Physics* 63, 1044-1047.

MORI, H. & FUJISAKA, H. 1980. Statistical dynamics of chaotic flows. *Progress of Theoretical Physics* 63, 1931-1944.

- MUNITZ, M. K. (Ed.) 1957. *Theories of the universe*. Glencoe, IL: The Free Press.
- VON NEUMANN, J. 1949. Recent theories of turbulence. Dans *Collected works*. Ed. A. H. Traub. New York: Pergamon 6, 437-472.
- NORTH, J. D. 1965. *The measure of the universe*. Oxford: Clarendon Press.
- NORTON, V. A. 1982. Generation and display of geometric fractals in 3-D. *Computer Graphics* 16, 61-67.
- NOVIKOV, E. A. & STEWART, R. W. 1964. Intermittency of turbulence and the spectrum of fluctuations of energy dissipation (en ruso). *Izvestia Akademii Nauk SSR; Seria Geofizicheskaya* 3, 408-413.
- NYE, M. J. 1972. *Molecular reality. A perspective on the scientific work of Jean Perrin*. New York: American Elsevier.
- OBOUKHOV, A. M. 1962. Some specific features of atmospheric turbulence. *J. of Fluid Mechanics* 13, 77-81. También en *J. of Geophysical Research* 67, 3011-3014.
- OLBERS, W. 1823. Über die Durchsichtigkeit des Weltraums. *Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1826* 150, 110-121.
- PAUMGARTNER, D., LOSA, G. & WEIBEL, E. R. 1981. Resolution effect on the stereological estimation of surface and volume and its interpretation in terms of fractal dimensions. *Journal of Microscopy* 121, 51-63.
- PEANO, G. 1890. Sur une courbe, qui remplit une aire plane. *Mathematische Annalen* 36, 157-160. Traducido en Peano, *Selected works*. Toronto University Press, 1973.
- PEEBLES, P. J. E. 1980. *The large-scale structure of the universe*. Princeton University Press.
- PERDANG, J. 1981. The solar power spectrum —a fractal set. *Astrophysics and Space Science* 74, 149-156.
- PERRIN, J. 1906. La discontinuité de la matière. *Revue du Mois* 1, 323-344.
- PERRIN, J. 1913. *Les Atomes*. París: Alean. Reimpreso en 1970 por Gallimard. Las ediciones posteriores a la de 1913 han envejecido más deprisa.
- PEYRIÈRE, J. 1974. Turbulence et dimension de Hausdorff. *Comptes Rendus (Paris)* 278A, 567-569.
- PEYRIÈRE, J. 1978. Sur les colliers aléatoires de B. Mandelbrot, *Comptes Rendus (Paris)* 286A, 937-939.
- PEYRIÈRE, J. 1981. Processus de naissance avec interaction des voisins. H volution de graphes, *Annales de l'Institut Fourier*, 31, 187-218.
- PONTRJAGIN, I. & SCHNIRELMAN, I. 1932. Sur une propriété métrique de la dimension. *Annals of Mathematics* 33, 156-162.
- RAMMAL, R. & TOULOUSF, G. 1982. Spectrum of the Schrödinger equation on a self-similar structure. *Physical Review Letters* 49, 1194-1197.
- RAMMAL, R. & TOULOUSF, G. 1983. Random walks on fractal structures and percolation clusters. *J. de Physique Lettres* 44, 13.
- RAYLEIGH, LORD 1880. On the resultant of a large number of vibrations of the same pitch and arbitrary phase. *Philosophical Magazine* 10, 73. Ver Rayleigh 1899 1. 491.
- RAYLEIGH, LORD 1899. *Scientific papers*. Cambridge UK: Cambridge University Press.
- RICHARDSON, I. F. 1922. *Weather prediction by numerical process*. Cambridge UK: Cambridge University Press. La reedición de Dover contiene una introducción de J. Chapman que contiene una biografía.
- RICHARDSON, I. F. 1926. Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour

graph. *Pr. of the Royal Society of London. A*, 110, 709-737.

RICHARDSON, I. F. 1960a. *Arms and insecurity: a mathematical study of the causes and origins of war*. Ed. N. Rashevsky & E. Trucco. Pacific Grove, C'A: Boxwood Press.

RICHARDSON, I. F. 1960s. *Statistics of deadly quarrels*. Ed. Q. Wright & C. C. Lienau. Pacific Grove, CA: Boxwood Press. richardson. i., i 1961. The problem of contiguity: an appendix of statistics of deadly quarrels. *General Systems Yearbook* 6, 139-187.

RICHARDSON, I. F & STOMMEL, H. 1948. Note on eddy diffusion in the sea. *J. of Meteorology* 5, 238-240.

ROGERS, C. A. 1970. *Hausdorff measures*. Cambridge UK: Cambridge University Press.

ROTHROCK, D. A. & THORNDIKE, A. S. 1980. Geometric properties of the underside of sea ice. *Journal of Geophysical Research* 85C, 3955-3963.

SCHEFFER, V. 1976. Equations de Navier-Stokes et dimension de Hausdorff. *Comptes Rendus* (Paris) 282A, 121-122.

SCHEFFER, V. 1977. Partial regularity of solutions to the Navier-Stokes equation. *Pacific J. of Mathematics* 66, 535-552.

SCHEFFER, V. 1980. The Navier-Stokes equations on a bounded domain. *Communications on Mathematical Physics* 73, 1-42.

SCHERTZER, D. & LOVEJOY, S. 1984. The dimension and intermittency of atmospheric dynamics. *Turbulent Stream Flow IV*. Ed. B. Launder. New York: Springer.

SCHWARZ, H. & EXNER, H. E. 1980. The implement action of the concept of fractal dimension on a semiautomatic image analyzer. *Powder Technology* 28, 207-213.

SERRA, J. 1982. *Image analysis and mathematical morphology*. New York: Academic.

SHLESINGER, M. F. & HUGHES, B. D. 1981. Analogs of renormalization group transformations in random processes. *Physica* 109A, 597-608.

SIERPINSKI, W. 1974. *Oeuvres choisies*. Ed. S. Hartman et al. Varsovie: Editions scientifiques.

STANLEY, H. E. 1977. Cluster shapes at the percolation threshold: an effective cluster dimensionality and its connection with critical-point phenomena. *J. of Physics* A10, L211-L220.

STANLEY, H. E., BIRGENEAU, R. J., REYNOLDS, P. J. & NICOLL, J. E. 1976. Thermally driven phase transitions near the percolation threshold in two dimensions. *J. of Physics* C9, L553-L560.

STAPLETON, H. B., ALLEN, J. P., FLYNN, C. P., STINSON, D. G. & KURTZ, S. R. 1980. Fractal form of proteins. *Physical Review Letters* 45, 1456-1459.

STAUFFER, D. 1979. Scaling theory of percolation clusters. *Physics Reports* 34, 1-74. Stauffer, d. 1980. Hausdorff dimension... and percolation... *Zeitschrift für Physik* B37, 89-91.

STEIN, K. 1983. The fractal cosmos. *Omni* (February issue).

STEINHAUS, H. 1954. Length, shape and area. *Colloquium Mathematicum* 3, 1-13.

STENT, G. 1972. Prematurity and uniqueness in scientific discovery. *Scientific American* 227 (December) 84-93.

STEPHEN, M. J. 1981. Magnetic susceptibility of percolating clusters. *Physics Letters* A87, 67-68.

- SUZUKI, M. 1981. Extension du concept de dimension —transitions de phases et fractales (en japonais). *Suri Kagaku* 221, 13-20.
- TAQQU, M. S. 1970. Note on evaluation of R/S for fractional noises and geophysical records. *Water Resources Research* 6, 349-350.
- TAQQU, M. S. 1975. Weak convergence to fractional Brownian motion and to the Rosenblatt process. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie* 31, 287-302.
- TAQQU, M. S. 1977. Law of the iterated logarithm for sums of nonlinear functions of the Gaussian variables that exhibit a long range dependence. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie* 40, 203-238.
- TAQQU, M. S. 1978. A representation for self-similar processes. *Stochastic Processes and their Applications!* 55-64.
- TAQQU, M. S. 1979a. Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie* 50, 53-83.
- TAQQU, M. S. 1979b. Self-similar processes and related ultraviolet and infrared catastrophes. *Random Fields: Rigorous Results in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*. Amsterdam: North Holland.
- TCHENTSOV, N. N. 1957 (traducción). Lévy's Brownian motion for several parameters and generalized white noise. *Theory of Probability and its Applications* 2, 265-266.
- TRICOT, C. 1981. Douze définitions de la densité logarithmique. *Comptes Rendus (Paris)* 293-1, 549-552.
- ULAM, S. M. 1957. Infinite models in physics. *Applied Probability*. New York: McGraw-Hill. Ver Ulam 1974, 350-358.
- ULAM, S. M. 1974. Sets, numbers and universes: selected works. Cambridge, MA: MIT Press.
- DE VAUCOULEURS, G. 1956. The distribution of bright galaxies and the local supergalaxy. *Vistas in Astronomy II*, 1584-1606. London: Pergamon.
- DE VAUCOULEURS, G. 1970. The case for a hierarchical cosmology. *Science* 167, 1203-1213.
- DE VAUCOULEURS, G. 1971. The large scale distribution of galaxies and clusters of galaxies. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 73, 113-143.
- VILENKIN, N. Y. 1965. *Stories about sets*. New York: Academic.
- VOLDMAN, J., MANDELROT, B. B., HOFVEL, L. W., KNIGHT, J. & ROSENFELD, P. 1983. Fractal nature of software-cache interaction. *IBM J. of Research and Development* 27, 164-170.
- VOSS, R. F. & CLARKE, J. 1975. « $1/f$  noise» in music and speech. *Nature* 258, 317-318.
- VOSS, R. F. 1978.  $1/f$  noise in music; music from  $1/f$  noise. *J. of the Acoustical Society of America* 63, 258-263.
- VOSS, R. F. 1982. Random fractal forgeries, in *Fundamental Algorithms for Computer Graphics*. Edited by R. A. Earnshaw, NATO ASI Series Vol. F13, New York: Springer Verlag, 13-16 & 805-835.
- VOSS, R. F., LAIBOWITZ, R. B. & ALESSANDRINI, E. I. 1982. Fractal (scaling) clusters in thin gold films near the percolation threshold. *Physical Review Letters* 49, 1441-1444.
- WIENER, N. 1953. *Ex-prodigy*. Cambridge, MA: MIT Press.
- WIENER, N. 1956. *I am a mathematician*. Cambridge, MA: MIT Press.

WIENER, N. 1964. *Selected papers*. Cambridge, MA: MIT Press.

WIENER, N. 1976. *Collected works*. Cambridge, MA: MIT Press.

WIGNER, E. P. 1960. The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 13, 1-14. Ver Wigner: *Symmetries and reflections*. Bloomington: Indiana University Press (también el MIT Press Paperback) 222-237.

DE WIJS, H. J. 1951 & 1953. Statistics of ore distribution. *Geologie en Mijnbouw* (Amsterdam) 13, 365-375 & 15, 12-24.

XIPF, G. K. 1949. *Human behavior and the principle of least-effort*. Cambridge, MA: Addison-Wesley.



BENOÎT MANDELBROT. Nació el 20 de noviembre de 1924 (Varsovia, Polonia) y murió el 14 de octubre de 2010 (Cambridge, EE.UU.), a los 85 años de edad.

Está considerado uno de los matemáticos más importantes de nuestro tiempo. Desarrolló su trabajo en numerosos campos de la ciencia y el arte, y es considerado el padre de los fractales. El profesor Mandelbrot se interesó por cuestiones que nunca antes habían preocupado a los científicos, como los patrones por los que se rigen la rugosidad o las grietas y fracturas en la naturaleza. Mandelbrot sostuvo que los fractales, en muchos aspectos, son más naturales, y por tanto mejor comprendidos intuitivamente por el hombre, que los objetos basados en la geometría euclidiana, que han sido suavizados artificialmente.

Fue profesor de matemáticas en la Universidad de Yale y también trabajó como investigador para los laboratorios de IBM. Fue miembro de la Academia Americana de Artes y Ciencias y obtuvo numerosos premios, como el *Japan Prize* de Ciencia y Tecnología y el *Wolf Prize* de física.

## Notas

- <sup>[1]</sup> 1975, fecha de la 1.<sup>a</sup> edición de este Ensayo (*N. del E.*) <<
- <sup>[2]</sup> La X se refiere a la Ecole Polytechnique. (*N. del T.*) <<
- <sup>[3]</sup> En inglés en el original (*character* = personaje). (*N. del T.*) <<
- <sup>[4]</sup> Presumiblemente, tampoco lo hay en español. (*N. del T.*) <<

